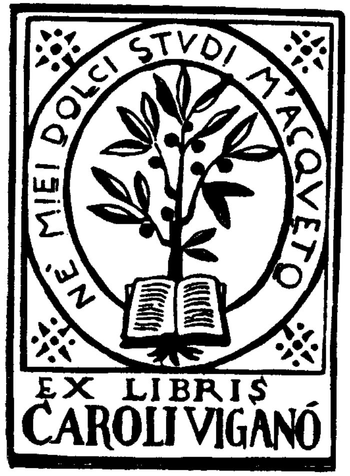

PRELEZIONI
SUI PRINCIPJ MATEMATICI
DEL NEWTON.

PRELEZIONI

SUI PRINCIPJ MATEMATICI

DELLA FILOSOFIA NATURALE

DEL CAVALIER ISACCO NEWTON

PER USO DELL' UNIVERSITÀ INTERNA DEL REAL CONVITTO DEL SALVATORE.

TOM. II.

NAPOLI 1793.

Presso GIUSEPPE DI BISOGNO .

Con Licenza de' Superiori .

GEOMETRICHE PRENOZIONI.

Prenoz. I. La retta AB, che insistendo perpendicolare all' altra QA muovesi equabilmente lungo questa retta, e nello stesso tempo ne compie una rivoluzion circolare ed uniforme intorno al punto A, dee descrivere col suo estremo B una linea a doppia curvatura, che suol dirsi *Spira cilindrica*, o *Linea elica*. Il cerchio, che si descriverebbe dalla BA, s' ella non avesse moto progressivo, dicesi *Base della Spira*, di cui n' è *Asse* la QA: ed AQ l'*Altezza*. Fig. 54. n. 1.

Sia BRQ cotesta Spira, che seghi la BA sotto l' angolo RBA, e la circonferenza della sua base nell' angolo RBO. Quest' angolo suol dirsi *Acutezza della Spira*.

1. *La lunghezza della Spira sta alla circonferenza della di lei base, come il raggio al coseno dell' Acutezza di essa Spira, cioè al coseno dell' angolo* RBO. 2. *La lunghezza della Spira è alla di lei altezza, come il raggio al seno dello stesso angolo* RBO. 3. *E finalmente l' altezza della Spira sta alla circonferenza della di lei base, come il seno al coseno dell' angolo* RBO.

Imperocchè il punto B, mentre equabilmente percorre l' elemento BC di una retta parallela ad AQ, è obbligato a descrivere l' archetto circolare OB. Dunqu' ei secondando a questi due moti dovrà effettivamente percorrere la diagonale BR, ch' è il primo elemento della Spira. E saranno questi tre spazietti BC, BO, BR proporzionali a' tre lati RO, BO, BR del triangoletto ROB rettangolo in O: cioè al seno dell' angolo RBO, al coseno dello stesso angolo, ed al raggio. C. B. D.

Cor. I. Se dal punto B, ove la Spira incontri la circonferenza della sua base, si prenda un qualunque arco circolare BY, e per Y si distenda YZ parallela ad Fig. 54. n. 2.

 AQ,

A Q, che seghi la Spira in Z; saran pure *le tre linee* B Z, Z Y, Y B, *come il raggio, il seno dell' Acutezza della Spira, e'l di lei coseno.*

Cor. II. E se pongasi BY $=$ x, e l'angolo ZBY $= \varphi$; sarà Y Z $=$ x. Tang. φ, e B Z $=$ x. Sec. φ. Imperocchè le tre linee B Y, Y Z, Z B son proporzionali alli tre lati B O, O R, R B del triangoletto R O B rettangolo in O, che son proporzionali al raggio, alla tangente dell' angolo R B O, ed alla secante di esso.

Fig. 52. n. 1. Prenoz. II. *I due Angoli rettilinei* A C B, a c b *sono direttamente come gli archi circolari* A B, a b, *che li sottendono, ed inversamente come i raggi* C A, c a *di questi cerchi.*

Dim. Prendasi C T uguale a *c a*: e col centro C intervallo C T si descriva l'arco circolare Q T. Sarà l'angolo T C Q all'altro *a c b*, come Q T a *b a* (33. El. VI.). Ma Q T sta a *b a* in ragion composta di QT a B A, e di B A a *b a* (Pren. I. Mecc.): e la prima di queste ragioni componenti è uguale a quella di CT, o della sua uguale *c a* a C A. Dunque sarà l'angolo T C Q, o A C B all' altro a c b in ragion composta di B A a *b a*, e di *c a* a C A. C. B. D.

Prenoz. III. *Se le grandezze* A, B, C, D, &c. *sieno in ordinata ragione colle altrettante* a, b, c, d, &c., *e le ultime di tali serie dicansi* V, *ed* v; *sarà* A $+$ B $+$ C $+$ D $+$ &c : V : : a $+$ b $+$ c $+$ d $+$ &c : v. *Cioè la somma di queste serie saran proporzionali alle ultime grandezze loro.*

Dim. Imperocchè essendo A:B::a:b; sarà componendo A $+$ B : B : : a $+$ b : b. Ma è ancora B : C : : b : c, dunque sarà *ex æquo* A $+$ B : C : : a $+$ b : c, e di nuovo componendo sarà A $+$ B $+$ C : C : : a $+$ b $+$ c : c. Ed in simil guisa distendendo cotesto ragionamento, e chiamando V, ed v le ultime grandezze di queste serie, sarà A $+$ B $+$ C $+$ &c : V : : a $+$ b $+$ c $+$ &c:v. C.B.D.

Prenoz. IV. §. 1. Def. I. Se nella retta infinita A H, si prendano le parti infinitesime, ed uguali A B, B C, C D, &c, A b, b c, c d, &c., e da' punti A,B,C,&c. si alzino le perpendicolari AQ,BE,CF,DG, &c. che sieno in continua proporzione geometrica crescente, e le altre A Q, b e, c f, d g, &c., che sieno nella stessa progressione geometrica decrescente; la Curva g Q G, che passa pe' di loro estremi, si dirà *Logistica*, o *Logaritmica*; ed essa retta A H sarà di lei *Assintoto*. Fig. 51. n. 1.

§. 2. Def. II. Le AB, AC, AD, &c, Ab, Ac, Ad, &c. chiamansi *Ascisse* di tal curva, ed AQ, BE, CF, &c. A Q, b e, c f, &c. *loro corrispondenti ordinate*. Le prime Ascisse son poi *positive*, e le altre *negative*.

§. 3. Cor. I. E poichè le ascisse A B, A C, A D, &c. sono aritmeticamente proporzionali, e le corrispondenti loro ordinate A Q, B E, C F, &c. in continua geometrica proporzione; saranno le ascisse di questa Curva *logaritmi delle corrispondenti ordinate*: cioè le A B, A C, A D, &c. *son log-mi delle* B E, C F, D G, &c. *o delle ragioni di* B E *ad* A Q, *di* C F *ad* A Q, *di* DG *ad* AQ &c. Ed A b, A c, A d, &c. *log-mi delle ragioni* di b e *ad* A Q, *di* c f *ad* A Q, *di* d g *ad* A Q, &c.

§. 4. Cor. II. E prendendo per unità l'ordinata A Q, che corrisponde al punto A, principio delle ascisse; saranno le ordinate B E, C F, D G, &c. maggiori dell' unità A Q: e di essa ne saran minori le altre b e, cf, dg, &c.

§. 5. Cor. III. *Dunque il log-mo dell' unità sarà zero: saran positivi i log-mi delle grandezze maggiori dell' unità: e negativi i log-mi di quelle grandezze, che son minori di essa. Di più sarà infinito il log-mo di una grandezza infinita, e di un' altra infinitesima ei sarà un infinito negativo.*

§. 6. Cor. IV. E perchè il rapporto de' numeri a' loro log-mi non può assegnarsi geometricamente: la Logistica sarà una curva trascendente: come quella in che le ascisse, e le ordinate sono tra esse come i numeri, e i log-mi loro.

§. 7. Prop. I. *Se nell'Assintoto Rd della Logistica SQg prendansi ovunque le due parti uguali R B, A d; le ordinate R S, B E, condotte per gli estremi della prima, saran proporzionali alle ordinate A Q, d g, che si tirano per gli estremi dell' altra.*

Dim. Si dividano coteste rette BR, A d nelle porzioni R D, D C, &c. A b, b c, &c. infinitesime, ed uguali: ed intendansi pe' punti delle divisioni condotte le ordinate alla curva. Saranno le ragioni di R S : DG, di D G : C F, &c. uguali fra loro, ed uguali alle altre di A Q : b e, di b e : c f, &c. (§.1). E quindi la ragion, che si compone dalle prime, pareggerà la ragion composta dalle seconde: cioè sarà la ragione di R S a BE uguale alla ragione di AQ a d g. C. B. D.

§. 8. Cor. Dunque I. La quantità della ragione di R S a B E è tanto moltiplice della quantità della ragione di R S a D G, quanto B R è moltiplice di R D. II. Ed essendo D R uguale a d c, sarà RS:DG::cf:dg, e convertendo R S : S T :: c f : f t.

§. 9. Prop. II. *La Sottangente della Logistica è di una costante grandezza, ovunque le si tiri la tangente.*

Dim. Si tirino a' due punti qualunque E, e G le tangenti E H, G K: ed ordinate le rette E B, G D, si prendano le due particelle B β, D δ infinitesime, ed uguali fra loro, e si ordinino parimente le altre due rette $\beta\,\epsilon$, $\delta\,\gamma$: e finalmente da' punti E, e G su queste ordinate si calino le perpendicolari E m, G n. Or essendo tra se simili i due triangoli E ϵ m, E B H, sarà ϵ m : m E :: E B : B H. Ma per la similitudine degli altri G γ n, G D K, sta benanche Gn : n γ :: DK:DG. Dunque per uguaglianza ordinata sarà m ϵ : γ n, cioè (Cor. prop. prec.) E B a G D, come il rettangolo di EB in DK a quello di B H in D G. Per la qual cosa essendo questi due rettangoli nella ragione delle loro basi E B, e G D, è forza, che sieno uguali le di loro altezze D K, B H, che sono le Sottangenti della curva in G, ed E. C. B. D.

§.10. Cor. I. Essendosi dimostrato esserne ϵm:mE::EB:BH, sarà il rettangolo delle medie m E, E B uguale al rettangolo dell' estreme ϵ m, B H. Cioè *ogni rettangoletto iscritto nella Logistica pareggia il rettangolo fatto dall' elemento corrispondente dell' ordinata nella Sottangente.*

§. 11. Cor. II. Suppongansi disuguali le retticciuole B β, D δ; saran pure i rettangoli di H B in ϵ m, e di K D in γ n respettivamente uguali a' rettangoli EmβB, GnδD. E quindi le retticciuole ϵ m, γ n, cui son proporzionali (1. El. VI.) i primi rettangoli, saranno come gli altri due E m β B, G n δ D. E quindi (Pr.4. Mec.) Em : Gn :: (ϵ m : γ n) (G D : E B).

§. 12. Cor. III. Dunque E m, o B β si potrà esprimere per ϵ m diviso per E B. Cioè l' *elemento del log-mo sarà come l' elemento del numero diviso per lo stesso numero.*

§. 13. Prop. III. *I Log-mi delle ordinate uguali* R S, C Φ *delle due Logistiche* Q G, Q Φ *sono proporzionali alle Sottangenti di queste curve.*

Dim. Le due Logistiche Q G, Q Φ intendansi riferite al comune Assintoto A R: e dal punto Q, ov' esse intersecansi, si ordini ad A R la retta Q A. Dipoi dalle ascisse A R, A C, corrispondenti alle ordinate uguali R S, C Φ, si tronchino le particelle infinitesime R ρ, C μ proporzionali alle A R, A C. E finalmente si dicano T, e t le sottangenti delle Logistiche Q G, Q Φ.

Ciò premesso, le due ascisse A R, A C sono equimoltiplici delle loro particelle R ρ, Cμ: ed è poi AR tanto moltiplice di R ρ (8), quanto la quantità della ragione di R S ad A Q è moltiplice della quantità della ragione di R S ad $\rho\,\sigma$. E similmente A C è tanto mol-

moltiplice di $C\mu$, quanto l'esponente della ragione di $C\Phi$ ad AQ è moltiplice di quello di $C\Phi$ ad $\mu\varphi$. Dunque saranno le due ragioni di RS a $\rho\sigma$, e di $C\Phi$ a $\mu\varphi$ uguali fra loro, come dall'ipotesi sono uguali le ragioni di RS ad AQ, e di $C\Phi$ ad AQ. E quindi sarà $\rho\sigma$ uguale a $\mu\varphi$: ed So uguale a $\Phi\omega$.

E poichè i rettangoli di T in So, e di t in $\Phi\omega$ sono respettivamente uguali (10) agli altri due di $R\rho$ in $\rho\sigma$, e di $C\mu$ in $\mu\varphi$: e si è poi mostrata $So = \Phi\omega$, ed $\rho\sigma = \mu\varphi$; sarà $T:t::R\rho:C\mu::AR:AC$. Cioè AR, ed AC log-mi delle ordinate uguali RS, $C\Phi$, sono come le Sottangenti T, e t delle Logistiche. C.B.D.

§. 14. Cor. I. Con che sapendosi il log-mo di un dato numero, preso in una data Logistica, si potrà determinare il log-mo, che allo stesso numero ne corrisponde in un'altra: facendo come la Sottangente di quella curva alla Sottangente di questa, così quel primo log-mo, al log-mo che si dimanda.

§. 15. Cor. II. E viceversa sapendosi i log-mi di uno stesso numero presi in due diverse Logistiche, si saprà la ragione delle Sottangenti di queste curve.

§. 16. Cor. III. E poichè nel Sistema de' log-mi volgari il log-mo di 10 è 1,00000, e nell'iperbolico egli è 2,30258; le Sottangenti delle Logistiche, cui rapportansi questi due Sistemi, cioè *della Volgare, e dell'Iperbolica*, saranno nella ragione di 1,00000 a 2,30258.

§. 17. Prop. IV. *Lo Spazio Logaritmico* $SgXdR$ *compreso dall'ordinata* SR, *dalla curva* SQg, *e dal di lei Assintoto* Rd, *tuttochè sia d'infinita lunghezza, ne pareggia il rettangolo della Sottangente di tal curva nella riferita ordinata.*

Dim. Il rettangolo di T in So è uguale al rettangoletto $Ro\sigma\rho$ iscritto nella Logistica (10). Dunque continuando questo ragionamento per gli altri rettangoletti inscritti in essa curva; sarà la somma di que

sti,

sti, cioè l'aja $SgXdR$, uguale alla somma di quelli, cioè al rettangolo della Sottangente T nell'ordinata SR. C. B. D.

§. 18. Cor. I. Da un qualunque punto R della Lo- *Fig.* 48.
gistica RHF conducasi la retta RG parallela al di lei assintoto AE; sarà lo spazio $RFZEA$ uguale al rettangolo di T in RA: e l'altro spazio $HFZEI$ sarà puranche uguale all'altro di T in HI. Dunque lo spazio $RHIA$, differenza di que' due spazj log-mici, sarà uguale al rettangolo della Sottangente T nella QH, differenza delle ordinate RA, HI.

§. 19. Cor. II. *E quindi gli spazj log-mici* $RHIA$, $ROMA$, *&c. saranno, come* QH, TO, *&c, differenze delle ordinate, che li chiudono.*

§. 20. Cor. III. Suppongasi esser l'ordinata AR uguale alla Sottangente AX della Logistica, cioè a T; sarà semiretto l'angolo QRX: e quindi RQ uguale a Qh. E con ciò l'aja Log-mica RQH, ch'è differenza di $RQIA$, e di $RHIA$, sarà uguale ad $RA.Qh - RA.QH = RA.Hh$. E così ancora sarà $RTO = RA.Oo$, &c.

§. 21. Cor. IV. *Dunque gli spazj* RQH, RTO, RCS, &c *essendo uguali a' rettangoli* $RA.Hh$, $RA.Oo$, $RA.Ss$, &c. *saranno proporzionali alle* Hh, Oo, Ss, &c.

Prenoz. V. *La Radice quadrata di* $aa+2b\omega$ *è uguale ad* $a+(b\omega:a)$, *qualor si supponga essere* ω *una grandezza infinitesima rispetto ad* a, *e* b. Cioè

$$\sqrt{(aa+2b\omega)} = a + b\omega : a.$$

Dim. La grandezza $(bb\omega\omega):aa$ è infinitesima rispetto a $2b\omega$. Dunque sarà $2b\omega = 2b\omega + bb\omega\omega : aa$. E quindi $aa+2b\omega+bb\omega\omega : aa = aa+2b\omega$. Ma il primo membro di questa equazione tien per radice $a+b\omega:a$. Dunque sarà ancora

$$\sqrt{(aa+2b\omega)} = a + \frac{b\omega}{a}.$$

Pre-

Prenoz. VI. *Se nel Semicerchio* AGT *si prenda l'arco* AG *tale, che il suo seno stia al raggio nella data ragione di* P *a* Q; *sarà un Massimo la somma de' prodotti di* AG *in* P, *e di* RT *in* Q.

Fig. 51. n. 1. Dim. Prendasi l'archetto Gg infinitesimo, e da' punti g, e G conducansi le rette *gr*, e GS respettivamente parallele a GR, ed AT. Sarà il triangoletto GgS simile al triangolo GRC (Pren. IX. Vol. I.): e quindi Gg a GS, o ad Rr, come CG a GR, cioè (dall'ipotesi) come Q a P. Dunque il rettangolo delle grandezze estreme Gg, e P sarà uguale a quello delle medie Rr, e Q: cioè P.Gg = Q.Rr: e quindi P.Gg − Q.Rr = o. Laonde la grandezza P.AG + Q.RT è tale, che il differenziale di essa è zero: dunque tal grandezza sarà un Massimo. C. B. D.

Cor. I. Suppongasi esser P uguale a Q; dovrà essere il seno dell'arco AG uguale al raggio: e quindi tal arco uguale al quadrante, ed RT uguale a CT.

Cor. II. Dunque *la somma del quadrante, e del raggio è maggiore della somma di un' altro arco, e del seno verso del di lui supplemento*. Cioè AGB+CT *è maggiore di* AG + RT.

Cor. III. Quest'ultimo risultato potrebbesi geometricamente dimostrare in questo modo. *L'arco* GB *è maggiore del suo seno* GD, o RC. *Dunque, aggiungendovi* AG + CT, *sarà* GB + AG + CT *maggiore di* RC + CT + AG, *cioè* (AGB+CT) > (AG + RT). *E quindi* AGB + CT *è un Massimo*.

Scol. Se il differenziale di un'espressione variabile sia zero; ella d'ordinario è un Massimo, o un Minimo. E sarà un Massimo, se il di lei secondo differenziale sia negativo: ed un Minimo, se questo secondo differenziale sia positivo. Dunque quì avrebbesi dovuto dimostrare, che il secondo Differenziale della variabile (AG.P + RT.Q) sia negativo. Or questa cosa è facile a rilevarsi dall'Analisi, sol che si prenda il secondo differenziale di (AG.P + RT.Q). Ed è anche facile a dimostrarsi sinteticamente: imperocchè avendo nel Cor. III. rilevato, che AGB+CT sia un Massimo, quando P pareggi Q; per ogni altro rapporto di P a Q (il quale è sempre di minor disuguaglianza) dovrà eziandio esserne un Massimo una simigliante espressione.

Prenoz. VII. *Data l'inclinazione di una Spira ad un piano orizzontale; calcolarne la distanza di ciascun punto di essa dallo stesso piano.*

Soluz. Per l'asse della Spira AQDRC inclinata all'Orizzonte conducasi un piano verticale, che quivi dee formarne la sezione rettangolare AQDC: e sieno le rette CD, CB le comuni sezioni di questo piano colla base della Spira, e con un piano orizzontale sottopostole. Dal punto A si tiri AB perpendicolare su di BC: e preso un qualunque punto M nella periferia della detta base, si tirino per esso l'ordinata MR nel cerchio CMDR, e 'l lato MO nel cilindro AQDRC, incontrando in O la prima spira circondottagli: indi per O, ed N si distendano le due OT, NP parallele alla stessa AB, ed MT parallela alla CB. Sarà manifesto doversi fra se incontrare le rette MT, OT, constituendone (a) il triangolo MOT equiangolo, e quindi simile all'altro ABC. Fig. 55.

I. Ciò posto, i due angoli NCP, BCA sono uguali ad un retto, per esser retto l'angolo ACD, ch'è in mezzo ad essi: e son puranche uguali ad un retto gli angoli acuti BAC, BCA del triangolo ABC rettangolo in B. Dunque saranno gli angoli NCP, BCA uguali agli altri due BAC, BCA: onde toltovi il comune angolo BCA, dovrà restarvi l'angolo NCP uguale all'altro BAC. E quindi il triangolo CPN rettangolo in P sarà simile al triangolo ABC rettangolo in B, o al di lui equiangolo OTM.

(a) Prop. 10. El. XI.

II.

II. E perchè la retta M R sta nel circolo CMDR, ed è perpendicolare alla C D comune sezione di esso piano, e del rettangolo A Q D C; sarà la stessa M R (a) perpendicolare al piano verticale A Q D C: onde convien, ch' ella vi giaccia parallela all' Orizzonte. E quindi ogni perpendicolare calata da ciascun punto della M R sul piano orizzontale disteso per la B L sarà uguale ad N P.

III. Inoltre il raggio C G della base di questa Spira sia uguale ad 1: e pongasi l' arco R D $=$ s, e 'l suo coseno G N $=$ x; sarà la retta C N $= 1 + x$. Di più l' angolo MDO dell' acutezza della Spira si chiami σ, e 'l di lui seno, e 'l coseno dicansi p, e q respettivamente: e sieno m, ed n il seno, e 'l coseno dell' angolo NCP $= \omega$, ch' è l' inclinazione del circolo C M D R all' Orizzonte.

IV. Finalmente si ponga il seno massimo uguale ad 1: ed essendo per la natura di questa Spira (Pren.I.) DM : MO :: q : p, ed MO : OT :: 1 : n (imperciocchè presa per raggio l' ipotenusa MO del triangolo MTO, il cateto TO è coseno dell'angolo MOT $=$ CAB $=$ PCN); sarà *ex æquo* DM:OT::q : pn. E quindi, essendo DM $=$ s; sarà OT $=$ (p n s) : q. Ma nel triangolo NCP rettangolo in P sta N C ad N P, come il seno massimo al seno di NCP: dunque in simboli analitici avrassi $1 + x$:NP::1:m, e con ciò N P $= m(1 + x)$: e finalmente la retta O I, ch'è uguale ad O T + T I, sarà uguale ad OT + NP, cioè, come si è rilevato, a $\frac{pns}{q} + m(1 + x)$.

LA

(a) Questo può trarsi dalla Def. IV. El. XI.

LA
STATICA.

CAP. I.

Prenozioni sulle Macchine.

§. 1. Defin. I. Le *Macchine* sono quegli strumenti congegnati dall' uomo, o dalla Natura per muovere vantaggiosamente i corpi. E la scienza, che le ha per oggetto, *Statica* si domanda.

§. 2. Scol. Negli effetti, che colle Macchine produciamo, evvi sovente un risparmio della forza, o del tempo, ond' essi dovrebbersi assolutamente ottenere: e questi son que' principali vantaggi, che da tali strumenti ricaviamo. Or sebbene il Gran Galilei, e con seco i Meccanici posteriori abbian creduto non potersi congiuntamente promuovere, ed ottenere cotesti vantaggi, e che la promozione dell' uno torni a discapito dell' altro; pur non di meno seguendo le orme di Eulero (*a*) vi mostrerò nel Capo VI. ciò esser vero nelle Macchine ideali, che soglion considerarsi nude d' inerzia e di peso, e non già nelle reali, i di cui pezzi, che le compongono, sono essenzialmente ricolmi di tali forze, ed avvivati.

A §. 3.

(a) Vedi Eulero *Vol.* X. *Att. Ant. Pietrob.*, e *Vol.* III. ed VIII. *Nuov. Comment. Pietrob.*

§. 3. Defin. II. Le Macchine, che son opere della Natura, diconsi *naturali*: ed *artificiali* quelle, che la mano dell'uomo emula del di lei magistero ha congegnate.

§. 4. Scol. Basta por mente a que' mezzi, onde Natura, negli Animali agevola le funzioni del viver loro, ed a quegli altri, con cui principalmente vantaggiamo il viver nostro sociale, per averne a dovizia di tali Macchine gli esempli. Ma il credereste mai? la maggior parte delle più insigni Macchine artificiali, che pajon prodotte dall' acume de' Geometri, de' Meccanici, o degli Analisti, non son dovute, che alla sperienza de' sagaci fabri (*a*). La qual cosa perchè intendiate a disteso, risalite col pensier vostro sull' Antichità rimota: e Voi stupirete osservando quai Macchine, ed opere prodigiose si sepper fare in que' tempi, in che la Geometria stava nell' infanzia, e la Meccanica non erasi nella mente de' Fisici concepùta. Il Popolo Romano, ch' era il men Geometra infra le più culte nazioni, eseguì con mirabile agevolezza ampie vie, lunghi acquidotti, immensi cunicoli sotterra. I suoi Duci all' istante gittavan de' ponti sui fiumi, er-

(a) Un Geometra, che attentamente consideri le Macchine di Mastro Zabaglia Romano, non sol vi ammira l'ingegno, e'l magistero di questo rozzo, e semplice fabro; ma seco delle sterili sue conoscenze o si vergogna, o si duole.

ergevano delle Torriambulanti, de' Cavalieri di gran mole. Ed in fin semplici privati sepper fare augusti Templi, Teatri mobili (*a*), ed altre magnifiche produzioni. E volendone a noi medesimi riclamare, quante volte non ci sarà avvenuto restarne in pratica defraudati di quella speranza, che dalla teoria di una Macchina erasi in noi conceputa? in quante congiunture non ci saremo querelati dell' inobbedienza delle Macchine (*b*) in

 con-

(a) Ne' nostri Abruzzi vedesi l' *Emissario di Claudio*, ch'è un canale di tre miglia e mez. scarpellato entro a più monti di materia dura, il quale conduceva nel Garigliano le acque del Lago Fucino, ch' è un picciol mare sulle vette di sublimi monti. Egli or si ritrova interriato, e'l nostro Amabile Sovrano ne ha commesso il pulimento a' nostri Dotti Ingegneri D. Ignazio Stile, D. Ferdinando Roberto, e D. Policarpo Ponticelli.

(b) Il Teatro mobile di Curione, come rapporta Plinio, era un composto di due Teatri di grosso legno, rivolti l'un l'altro colle loro parti convesse, ed atti a potersi di repente conformare in Anfiteatro per mezzo di balestre, e di altri occulti ordegni, che aggiravano ciascun di essi intorno a quel cardine, su cui si librava. E quindi l'immenso Popolo Romano, che di mattina eravi assiso per veder le opere teatrali, girando velocemente in aria insiem co' Teatri, si trovava in un' Anfiteatro, Spettatore delle Gladiatorie zuffe. Il Teatro di Scauro l' Edile, nol niego, fu d' impareggiabile magnificenza; ove si consideri l' immenso spazio, che chiudeva, e la triplice scena, ch' esibiva: l' infima delle quali era di marmo, la media di cristallo, e la suprema poi di dorato legno, e tutte sostenute da 360. colonne, di cui le maggiori aveano 38. pie. d' altezza. Pur non di meno il Teatro di Curione concreto alle ideali, ed astratte? Ma tolga il Cielo, che ciò torni a discredito della Geometria, dell' Analisi, o della Fisica, quasichè queste scienze cittadine del Mondo delle astrazioni non si potessero quaggiù per util nostro richiamare. E s' imputi a' Meccanici, i quali han voluto dal solo equilibrio delle Macchine trarne le regole del moto di esse: mettendo in non cale l'inerzia di questi strumenti, di que' corpi che vi agiscono e vi resistono, e le diverse maniere, onde le Potenze, e le Resistenze quivi diffondono le successive loro azioni.

§. 5. DEFIN. III. Quell' effetto, che vuol ottenersi con risparmio di tempo, o di forza, dicesi *Resistenza*: e la forza, che vel produce, si domanda *Potenza*.

§. 6. SCOL. Le Potenze, che con altra espressione soglion dirsi *forze moventi*, non sono, che *i Pesi*, *le Molle*, *il Potere espansivo dell' aria*, *de' vapori*, *de' fluidi aeriformi*, &c. (le di cui azioni sono continue), *le Forze Animali*, *gl' Impulsi delle acque*, *il Vento*, ed altre simiglianti cagioni, che sogliono con intermittenza sulle Macchine operare. Ma sì quelle, che queste talora agiscono

rione parmi opera più degna del Romano nome: imperciocchè il sito, e la robustezza de' suoi cardini, il libramento e la compage di moli sì ingenti, e 'l modo, e la forza di aggirargl' insieme, faran mai sempre stupire i più acuti Matematici dell' età nostra.

no uniformemente, replicando spinte uguali in uguali particelle di tempo: talora variano sensibilmente nel modo, e nell' intensità d' agire. E riguardo alle Resistenze, o agli effetti procuratici con delle Macchine, chi può divisarvene le specie, e le differenze loro? pur non di meno i principali di questi effetti riduconsi *a trarre de' gran pesi*, *ad elevarli*, *a fargli scendere adagio*; *a vibrarli*, *a volgerli velocemente*, *a percuoter forte altri corpi*, *a fenderli*, *a stringerli*, *a stritolarli*, &c.: e ciò in infinite diverse guise secondo i diversi fini, cui le Macchine destiniamo.

§. 7. DEFIN. IV. La Potenza *equilibrasi* colla Resistenza, se dalle vicendevoli loro azioni niun moto ne segua nella Macchina, ove amendue sono applicate.

§. 8. SCOL. I. L'Equilibrio di più corpi, che tra se agiscono, si dice *Stabile*, o *Fermo*, se spinti da una picciola forza comincino ad oscillare, ma tantosto riprendano la quiete, e 'l primiero sito. E si dirà *Labile* l'Equilibrio di quegli altri corpi, cui una picciola forza impressa li mette a guasto, facendoli crollar tutti, o buona parte di essi. Così se darete una picciola spinta ad una catena sospesa pe' suoi estremi, la vedrete immatinente oscillare, ma di lì a poco fermerassi, come dianzi ell' era. Ma spignendo un' arco formato da più globi, e

 da'

da' loro pesi sostenuto, lo abbatterete ben tosto, ancorchè lieve spinta gli avrete recata. Similmente un cono retto, che poggi colla sua base su di un fermo piano orizzontale, dovrà serbarvi un'equilibrio stabile, sostenendosi erto tralle picciole scosse, che gli recherete. Ma se mai vi riesca fermarlo su tal piano coll'apice in giù, e colla base all'insù; egli in tal sito avrà un' equilibrio labile, ove ogni levissima forza sarà potente a rovesciarlo.

§. 9. Scol. II. In questo Capitolo, e ne' due, che seguono, m' ingegnerò di mostrarvi l' Equilibrio delle Macchine con quel rigore di Geometria, che mi è riuscito dare a sì utile dottrina: e vi ragionerò nel VI. sul moto delle Macchine, adottando le saggie speculazioni del Grand' Eulero. E m'immagino, che stupirete osservando il divario, che avvi tra queste due Teorie, la diversità delle regole che vi si propongono, e la difficoltà nel calcolare i momenti delle Potenze, e delle Resistenze nelle Macchine che sono in moto: dovendosi in tal caso tener conto della (a) loro inerzia, di quella

(a) Il Gran Galilei avea sospettato, che all'inerzia della materia doveasi attribuire quella frequente inobbedienza delle macchine reali alle astratte, e non mica alle di lei imperfezioni, come opinavano alcuni. Imperocchè (così egli favella *Princ. Dial. I. sulle due Scienz. Nuov.*) „ nè anco il ricorrere all' imperfezioni della ma- „ teria, potenti a contaminare le purissime dimostra- „ zioni Mattematiche, basta a scusare l' inobbedienza „ delle macchine in concreto alle medesime astratte, e „ ideali: tuttavia io pure il dirò affermando, che astraen- „ do tutte le imperfezioni della materia e supponendo- „ la perfettissima, ed inalterabile, e da ogni accidental „ mutazione esente, pure il solo essere materiale (*cioè* „ *inerte*) fa che la macchina maggiore fabbricata dell' „ istessa materia, e coll' istesse proporzioni, che la mi- „ nore, in tutte l'altre condizioni risponderà con giu- „ sta simetria alla minore, fuorchè nella robustezza, e „ resistenza contro alle violenti invasioni. „ Ma l' Eulero ha indicate queste cose più distintamente nel *Vol. III. Nuov. Comm. di Pietrob.* „ Qui solis regulis, quæ vulgo „ in Mechanicæ elementis tradi solent, imbutus ad Ma- „ chinarum fabricam se accingit, de earum successu „ vel nihil prædicere valebit, vel spe concepta sæpis- „ sime frustrabitur . . . . . . Nec id adscribendum est „ frictioni, quippe qua sublata nihil etiam de Machi- „ nis sperandum: sed huic rei tribuendum, quod doctri- „ na Machinarum principiis æquilibrii solis sit super- „ structa: atque id tuto addatur, quod, si vis sollicitans „ parum major sit, quam affectio æquilibrii exigit, „ onus promoveatur. Sed omnes Machinæ ad motum „ destinantur, non ad æquilibrium, & maxima oneris „ celeritas perfectiorem Machinam reddit.

la de' corpi che loro dan moto o ne ricevono, della diversa maniera onde questi vi agiscono o vi resistono, e di tant'altre circostanze. E di là scoprirete la cagione, per cui da una Macchina in moto non si è sovente ritratto quel vantaggio, che il calcolo fondato sul solo equilibrio di lei abbondevolmente ne promettea.

§. 10. Scol. III. Una Potenza non può mai agire sulla Resistenza, nè questa opporsele in in verun modo, se le loro forze non si diffondano per l' intera Macchina, ove amendue sono applicate. Or questa vicendevole diffusion di forze non è una libera trasfusione dell' energia della Potenza sulla Resistenza, e dell' energia di questa su di quella; poichè ciascuna di esse dee perdere quella sua parte, che i sostegni della Macchina ne assorbiscono. Dunque I° non è l' intera forza della Potenza quella, che investe la Resistenza, nè tutta l' energia di questa internamente opponesi alla Potenza. II°. La ragion dell' equilibrio tra la Potenza, e la Resistenza vuol esser riposta nel divisato assorbimento delle loro forze. III°. E se ci riuscisse saper nelle Macchine la quantità di questo assorbimento, e 'l modo, onde per esse diffondonsi le forze della Potenza, e della Resistenza, si potrebbero senza stenti, e direttamente raccorre i caratteri, e le condizioni dell' equilibrio loro. Ma a saper tai cose indarno uom si affatica. Quindi saggiamente i Meccanici vi hanno escogitato de' Metodi indiretti, ed è loro riuscito scoprire i tre Principj fondamentali d' Equilibrio, che diconsi *Principio della Leva*, *Principio delle Velocità Virtuali*, *Principio d' Equivalenza*, da ciascun de' quali, come quaggiù vedrete, traesi l' equilibrio nelle Macchine.

§. 11. DEFIN. V. Le Macchine si distinguono in *semplici*, e *composte*. E' *semplice* una

una Macchina, se in un sol luogo di essa facciasi un parziale assorbimento di ciascuna forza, che vi agisce (a). E se questo assorbimento di forze succeda in più luoghi della Macchina distanti fra loro, ella si dirà *composta*.

§. 12. COR. Se da più Macchine semplici sene congegni un' altra, questa sarà una Macchina composta.

§. 13. SCOL. Le Macchine semplici non son, che la *Leva*, l' *Asse nella Ruota*, la *Girella*, il *Piano inclinato*, la *Vite*, e 'l *Cuneo*, le quali quaggiù immediatamente descrivo, e poi vi mostro nel capo III.° qual rapporto in ciascuna di esse debba avere la Potenza alla Resistenza per equilibrarvisi.

§. 14. DEFIN. VI. La *Leva*, che dicesi anche *Vette*, è una verga ben rigida, e diritta, la quale intorno ad un punto della sua lunghezza aggirasi circolarmente.

§. 15. Questo punto di rotazione chiamavasi da' Greci ὑπομοχλιον, hypomochlion, da' Latini *Fulcrum*, e dagli Italiani *sostegno*, o *punto d' appoggio* or si domanda. E si dicono *braccia* della Leva quelle di lei parti, che restano tra ciascuno de' di lei estremi, e 'l sostegno. Ella poi si dirà *di primo genere*, se in un' estremo di essa siavi ap-

(a) La Definizione delle Macchine semplici manca nelle istituzioni della Statica, onde si è proccurato supplirla nel divisato modo.

applicata la Potenza, nell'altro la Resistenza, ed in mezzo a queste il sostegno: *di secondo genere*, quando il sostegno stia in un suo estremo, nell'altro vi si applichi la Potenza, ed in mezzo a questa, e quello vi si trovi la Resistenza: *di terzo genere*, se mai la Potenza stia tra la Resistenza, e 'l sostegno. Ogni vette di primo genere suol anche dirsi *eterodromo*, perchè la Potenza, e la Resistenza vi si volgono a parti opposte: laddove per la cospirazione de' moti loro ogni Leva di secondo, o di terzo genere dicesi *omodroma*.

§. 16. Scol. Le figure n. 1, 2, 3, disegnano le Lieve di I°, II°, e III°. genere, in ciascuna delle quali P dinota la Potenza, R la Resistenza, e C il sostegno.

§. 17. Defin. VII. Una Leva dicesi *angolare*, se due verghe rigide, e diritte congiunte ad angolo ne' loro estremi possan volgersi circolarmente intorno all' apice di esso.

§. 18. Scol. ACa rappresenta una Leva
Fig. 9. angolare, di cui le verghe CA, Ca trovansi fortemente tra se congiunte in C, e quivi imperniate in modo, che possano solamente aggirarvisi nel piano del loro angolo (*a*).

§. 19.

(a) Oltre alle Leve Diritte, ed alle Angolari ve ne sono ancora delle *Curviline*, ove il sostegno può avere tante diverse posizioni riguardo alla Potenza, ed alla Resistenza, quante nella Leva dritta ne ho inditate.

§. 19. Defin. VIII. L' *Asse nella Ruota* è un cilindro retto di materia dura saldamente impiantato in mezzo ad una Ruota rigida di maggior diametro di esso, ed in modo, che avendo questi solidi un medesimo asse, vi si possano aggirare insieme agevolmente (*a*).

§. 20. Scol. La fig. 2. rappresenta la Macchina, che ho quì definita, ove I K L è la Ruota, ed E F H G il cilindro saldatole fortemente nel di lei centro, ed aventi il comune asse B D, intorno a cui son volubili insieme.

§. 21. Scol. Per adoperar questa Macchina deesi all' estremo della Ruota applicare una Potenza, la quale volgendo essa Ruota avvolga nel cilindro quella corda, cui è legato il peso da strascinarsi, o elevarsi.

§. 22. Defin. IX. *La Girella* è un cilindro retto fatto di materia dura, scanalato circolarmente nella sua parte convessa, e volubile intorno al suo asse, ch'è assai minore del diametro.

La Cassa, ove contiensi la Girella e dentro cui si aggira, dicesi di lei *Armatura*: e l' in-

(a) Questa Macchina diceasi da' Greci *Axis in Peritrochio*, e così fu anche da' Latini denominata. Ma Vitruvio le diè il nome particolare di *Sucula*, cioè di *Mangano*, o di *Burbera*, quando il di lei asse stia orizzontalmente disteso: e la chiamò *Ergata*, cioè *Argano* nel caso, che l' asse della stessa Macchina stia verticalmente impiantato sull' orizzonte.

intera Macchina composta dalla Girella, e dall' Armatura domandasi *Taglia*, o *Carrucola*.

La Girella poi si dirà *Stabile*, se solamente aggirisi intorno al suo asse: e si dirà *Mobile*, se oltre a questo moto abbiane un' altro progressivo.

§. 23. Scol. I. Le fig. 3. n. 1. e 2. dinotano la Girella Stabile, e l' altra Mobile.

§. 24. Scol. II. Volendo adoperar questa Macchina deesi nella sua scanalatura adattare una corda, e ad un capo di questa applicarne la Potenza. E, se la Girella sia stabile, dovrà all' altro capo legarsi quel peso, che si vuol trarre: s' ella sia mobile, dovrà questo capo annodarsi ad un immobile ritegno, legandone il peso all' armatura della Girella.

§. 25. Defin. X. *Piano Inclinato* è un piano duro ed immobile, che non sia verticale, nè orizzontale.

§. 26. Scol. Vedete quanto si disse su questa definizione nella Meccan. Cap. IX.

§. 27. Defin. XI. La *Vite* è un cilindro retto di materia ben salda, il quale nel suo convesso tien rilevata una spira, ed aggirandosi intorno al proprio asse entra in un foro cilindrico scanalato di un' identica spira, onde va adattando la convessità di quella linea spirale sul cavo di quest' altra.

Quel solido, cui si è praticato il detto foro cilindrico, domandasi *Madrevite*: la leva, che fa rivolger la Vite, chiamasi *Manubrio*, di cui l' *intera* lunghezza è la stessa leva prodotta sino all' asse della Vite: e dirò *pane della Vite* quella parte di un lato del cilindro, che resta fra due prossimi giri della spira.

§. 28. Scol. C T t è la Vite, o la Vite maschia: il foro cilindrico, e spiralmente incavato nel pezzo S X è la Madrevite: la retta P C è l' intero manubrio: e l' altra T t un pane della Vite. *Fig. 7.*

§. 29. Defin. XII. Il *Cuneo*, che suol dirsi *Bietta*, o *Zeppa*, non è, che un prisma triangolare fatto di materia dura. I triangoli, che son le basi del Cuneo, sogliono essere isosceli: e la retta, che ne unisce i loro vertici, domandasi *Taglio*, o *Filo del Cuneo*. Quel parallelogrammo del Cuneo, che opponesi al di lui taglio, si dice *dorso*, e gli altri due *facce del Cuneo*. E l' angolo, che misura l' inclinazione di queste facce, dicesi *angolo del Cuneo*.

§. 30. Scol. I. A C c b a rappresenta un Cuneo: i triangoli isosceli A C B, a c b son le sue basi: la retta C c n' è il suo taglio: e de' tre parallelogrammi A a b C, A a c C, B b c C il primo si domanda dorso del Cuneo, e gli altri due son le di lui facce. *Fig. 5.*

§. 31. Scol. II. Percuotendosi gagliardamente il dorso del Cuneo, il di lui taglio dee fender quel corpo, su cui insiste: ed in in tal Macchina la forza della percossa fa da Potenza, e la tenacità del corpo fenduto da Resistenza.

§. 32. SCOL. III. Le Macchine composte sono nella varietà pressochè infinite, ond' è impossibile ch' io quì ve ne rechi la maggior parte, non che tutte. E mi restringo solo a favellarvi delle tre seguenti, che sono insieme le più vantaggiose alla pratica, e le più insigni.

§. 33. DEFIN. XIII. Siavi un cilindro fortemente saldato ad un rocchetto, e ad una ruota dentata, ma in modo, che questi tre solidi abbiano un medesimo asse, intorno a cui sieno volubili tutt' insieme. Un' altro cilindretto abbia in simil guisa una ruota dentata, ed un rocchetto; ma il suo asse sia parallelo a quello del primo, e i denti della sua ruota stiano a contatto con que' del rocchetto del primo. E così in appresso vi sieno degli altri cilindretti. Si dirà questa Macchina un *Sistema di Ruote dentate*.

§. 34. COR. Questa Macchina è un composto di tanti Assi nella Ruota, quanti sono i divisati cilindretti, i quali muovonsi colla seguente legge. „ La Potenza aggirando „ la prima ruota insiem ne aggira il di lei „ rocchetto: i denti di questo urtano in „ que' della seconda ruota dentata, e la vol- „ gono insiem col suo rocchetto: questo „ anima la terza ruota dentata, e così in „ appresso, finchè si animi la Resistenza.

§. 35. SCOL. Nella figura 12. vedesi un tal sistema di Ruote dentate, ove le Ruote sono le AB, A'B', A''B'', &c. ed i rocchetti cb, c'b', c''b'', &c.

§. 36. DEFIN. XIV. La *Vite Perpetua* è quella, che non ha Madrevite, ed aggirandosi urta colla sua spira ne' denti di una ruota dentata, e la volge insiem col cilindro, cui si avvolge la corda attraente un peso.

§. 37. SCOL. Tal sarebbe la Macchina esibita nella figura 13.

§. 38. COR. La Vite perpetua inventata dall' Immortale Archimede, non è che un *Fig.13.* composto di una Vite, e di un' Asse nella Ruota. Così FAOBR è la Vite, ed NBMbC l' Asse nella Ruota.

§. 39. DEFIN. XV. Il *Polispasto* è un sistema di girelle per le di cui scanalature circonducesi una stessa corda, un capo della quale è legato all' armatura di esse, e all' altro adattasi la Potenza, che trae un peso legatone alla stess' armatura.

§. 40. SCOL. Nella figura 14. vedesi un Polispasto, se bene ve ne sieno degli altri di diversa forma.

CAP.

C A P. II.

PRINCIPJ FONDAMENTALI DELL' EQUILIBRIO.

§. 41. DEFIN. XVI. IL *Principio fondamentale d' Equilibrio* è un Teorema della Statica, col quale facilmente rilevansi le condizioni d' equilibrio nelle Macchine.

§. 42. SCOL. I principj fondamentali d' Equilibrio, che sono stati finora da' Meccanici ritrovati, riduconsi ai tre seguenti, detti *Principio della Leva*, *Principio delle Velocità Virtuali*, *Principio d' Equivalenza*, da ciascun de' quali può agevolmente intendersi l' equilibrio nelle Macchine, e ne' sistemi de' corpi, che agiscon fra loro. In questo capo non fo, che dichiararvi la natura, ed i pregi loro; ma il solo Principio d' Equivalenza mi sarà come face, ond' io vi dimostri quanto ne' capi seguenti mi occorre dire.

PRINCIPIO DELLA LEVA.

§. 43. Il Grande Archimede, che fu il primo tra' Geometri a specular le dimensioni de' Curvilinei, seppe anche prevenire i Meccanici nel geometrizzare su i rapporti delle forze, che si equilibrano: onde ragionevolmente in ogni età fu Principe de' Geometri salutato. Egli scrisse tante belle cose sugli Equiponderanti, e su i corpi, che stanno in sull' acqua, o che vi si muovono (a): ma niuna, cred' io, fu sì leggiadra, e di verità Meccaniche sì feconda, quanto il Principio della Leva, ch' ei propose nel I.° Lib.° degli Equiponderanti, e che io quì vi esprimo nel seguente modo: SE LE INEGUALI BRACCIA DI UN VETTE ETERODROMO SIENO INVERSAMENTE COME QUE' PESI, DI CHE VENGONO ESSE NE' LORO ESTREMI CARICATE; QUE' DUE PESI AVRAN MOMENTI UGUALI, E LA LEVA REGGERASSI IN EQUILIBRIO.

§. 44. Nella dimostrazione di questo Teorema dovean distinguersi due casi, cioè quando le braccia della Leva si trovino commensurabili fra loro, e quando esse non sien tali. Perciò saggiamente il Valentuomo cercò di dimostrare con principj puramente meccanici il Teorema VI.°, ove contiensi il primo caso, e poi nel VII.° adattò al secondo caso la dimostrazion del primo: servendosi a tal uopo del *Metodo de' limiti*, di cui nella misura de' Curvilinei erasi felicemente prevaluto. Ma intanto la dimostrazion del pri-

B

(a) Il titolo di questo Trattato è περὶ τῶν ὀχουμένων.

primo caso non è stata troppo gradevole a' Moderni Geometri: onde il Galilei, e lo Stevino (a) han cercato di semplificarla: e l'acutissimo Ugenio credendola contaminata d'una precaria supposizione l'ha cangiata interamente: adottando, in vece di una verga dritta, un piano volubile intorno ad una retta, e di pesi uguali caricato. Nè di ciò paghi l'Illustre Cavalier de Foncenex, e 'l sommo d'Alembert han finalmente proccurato di dimostrare lo stesso assunto co' potentissimi principj del Calcolo sublime: imperciocchè assai cale render ben salda la verità di questo principio, da cui come da fecondissimo seme pullula gran parte delle verità della Statica, e di tant'altre Scienze, che le sono affini.

§. 45. Ma la diffusion delle forze, come vel dissi altrove, trascende non pur del Volgo, ma de' Filosofi l'intendimento. Dunque non fia maraviglia, se Ingegni sì arguti e sagaci non abbian saputo nitidamente il Principio della Leva dimostrare. Ed in vero nella dimostrazione Archimedea, come in quella del Foncenex, e dell' Alembert, supponesi precariamente, che *tanto valgan due pesi uguali posti in un braccio di una Leva* (b), *quan-*

(a) Vedi la Statica di Simone Stevino, e i Dialoghi sul moto del Galilei.

(b) Io sulle prime credei qual Assioma, che tan-
to

quanto la somma loro applicatavi in mezzo ad essi. Nelle dimostrazioni di altri Fisici vi si scorgono de' sottilissimi sofismi, o de'

B 2 gra-

to valessero ad aggirare una Leva due pesi uguali posti in un di lei braccio, quanto l' aggregato loro applicatole in mezzo ad essi. Imperciocchè (così meco ragionava) se una verga diritta, rigida, ed immateriale si gravi ne' suoi estremi di uguali pesi, non v' ha dubbio, ch' ella debba sostener da per tutto quella stessa pressura, che le cagionerebbe la somma loro adattata nel punto medio di essa. Or intendasi prolungata cotesta verga quanto ne piaccia, e che si aggiri intorno ad un punto della parte protratta, non sarà anche vero, che i momenti de' primi pesi equivalgano a quello della somma loro postavi in mezzo ad essi? Ma tosto compresi il gran divario di queste due considerazioni, le quali nel primo aspetto sembrano identiche, e vi scoversi un sottilissimo sofisma, che talor s' intrude anche ne' più solidi, e perspicaci ingegni, e che mi fo un dovere d' indicarvelo.

Eccone un tal divario. L' azione de' pesi, de' quali è onusta una verga rigida, ed immateriale, è vero, che ugualmente si diffonda per la di lei lunghezza, e senza verun discapito; ma quando ella non poggi su di altro corpo, nè sia ad un' invincibile sostegno imperniata. Or nel supposto, ch' essa verga s' aggiri intorno ad un punto della sua lunghezza, ella necessariamente vuol essere in tal punto sostenuta da un' altro corpo. Dunque una parte dell' azion di ciascun peso sarà assorbita dal sostegno, e la rimanente parte inegualmente tra gli stessi corpi ripartita. E quindi queste due circostanze della Leva son ben diverse fra loro, nè la seconda può francamente ridursi alla prima. Ma poi questo argomento è un di quelli, che niente prova provando molto. In fatti, s' io vi dicessi, una verga immateriale gravata ne' suoi estremi di uguali pesi dee sostener tanta
pres-

gratuiti assiomi. E finalmente la dimostrazione Ugeniana, tuttochè non sia da precarie supposizioni denigrata, pure non è sì chia-

pressione, quanta le cagionerebbe la somma loro adattata in un qualunque punto di essa; ognun di Voi avrà per vero un tal Principio. E proseguendo il ragionamento come sopra, concluderei, che tanto valgano ad aggirare una Leva due pesi uguali posti in un braccio di lei, quanto l'aggregato loro applicatole in un punto qualunque della sua lunghezza. Lo che è contrario a quel di prima.

Il Sofisma poi, che suol intrudersi in questi ragionamenti, è la duplice idea, che spesso senza avvedercene leghiamo all'espressione *punto fisso di una verga*; ora prendendolo per quel punto, ch'è fisicamente fermato su di un sostegno, ove si ribocchi l'azion de' pesi della verga; ed ora per un punto geometricamente determinato, che non poggi su qualche sostegno. Per mostrarvi questa gemina nozione, non fo, che trascrivere una dimostrazione dell'Ill. Caval. de Foncenex *Vol. II. Miscell. Taur. pag.* 319. „ Si deux égales forces = p (, comme par exemple deux poids
Fig. 10. n. 2. „ égaux) agissent dans des directions paralelles sur le levier A B aux points A & B également eloignès du point fixe C, (quì il punto fisso significa il sostegno della Leva) Il est d'abord évident, que le levier sera in équilibre autour du point C, puisque toutes choses sont égales de part, e d'autre: je dis de plus, que le point C soutiendra le même effort, que si le forces p + p étoient immediatement appliquèes in C . . . . . . Qu'on fasse a présent C A = A E = B D, & qu'on imagine quatre forces = p appliquèes in D, E, C, C . . . . Or les forces E & C sont equivalentes (hyp.) a une force p. fonct. x appliquèe in A. & C &c. Ed ecco, che quì il punto A è fisso, ma non fissato su di un sostegno, com' erasi preso da principio.

chiara ed elegante, qual da' Geometri si agogna.

PRINCIPIO DELLE VELOCITA' VIRTUALI.

§. 46. Il secondo principio fondamentale della Statica, che per essere grandemente semplice, ed universale agli altri due suol preferirsi, è il seguente. UN SISTEMA DI FORZE, CHE COMUNQUE AGISCANO FRA LORO, DOVRA' EQUILIBRARSI, SE LA SOMMA DE' PRODOTTI DI CIASCUNA FORZA NEL DI LEI SPAZIETTO DI ACCESSO, O DI RECESSO SIA ZERO: cioè IN CASO D' EQUILIBRIO LA SOMMA DE' PRODOTTI DELLE POTENZE MOVENTI NELLE LORO VELOCITA' VIRTUALI E' SEMPRE ZERO.

§. 47. Che voglia intendersi per velocità virtuale, e quali sieno gli spazietti di accesso, e di recesso, potrete apprenderlo dal §. 238. della Meccanica. Ma convien sapere di vantaggio, che questo Principio al par di tant' altre verità meccaniche non nacque in mente a' Matematici sì generale ed esteso, come vel'ho quì sopra enunciato. Imperciocchè il Gran Galilei nel suo Trattato della Scienza Meccanica, e ne' Dialoghi sul moto si avvide, che *due Potenze moventi per equilibrarsi dovean essere inversamente come le loro velocità virtuali*: cioè *che in caso di equili-*

 li-

librio i momenti delle stesse Potenze, i loro impeti, le loro energie, o finalmente i prodotti di esse Potenze nelle loro velocità virtuali dovean pareggiarsi. Il suo famoso Discepolo Evangelista Torricelli si accorse, *che nell' equilibrarsi due pesi tra se legati, il loro centro di gravità non doveva ascendere in verun modo, nè discendere*. Ed altri ne inferirono, che *in ogni sistema di corpi tra se equilibrati, il centro di gravità loro n'è basso, quanto più può esserlo*. Ma era destinato al gran Geometra di Basilea il Signor Giovanni Bernulli percepir la semplice, ed universal natura del rammentato Principio, e ragguagliarlo a' Dotti. Sicchè dalle Gallie il Varignonio nè invaghì sì forte, che v'impiegò l' intera *Sezione IX. della sua Meccanica* per dimostarlo compiutamente. E 'l Principe degli Analisti il Signor de la Grange non ha guari ne ha rilevata una elegantissima formola, potente a risolvere i più momentosi Problemi della Statica, della Meccanica, e dell' Idrodinamica, sol che si sappia accortamente e con ispeditezza condurre il calcolo delle variazioni, ch'essa formola racchiude.

§. 48. Ma questo Principio sì semplice, e generale non può dirsi che sia un de' Primitivi della Statica; talchè nostra ragione possa intenderne la verità di esso per sola intuizione, come se fosse un' Assioma. Il Signor Varignonio nella citata Sezione IX. lo

ha dimostrato pe' principj della Composizione, e Risoluzione delle Forze: e da questi anch' io ho procurato nelle Prop. 38., e 39. della Meccanica, e nel Principio del Cap. VIII. della Statica dimostrarvelo. Altri per altre vie si son condotti a provarlo: e 'l P. Riccati con un brieve, e metafisico ragionamento ha preteso stabilirlo a priori nel seguente modo. „ L' azione di una Potenza, „ che si applichi ad un corpo (*a*), è come „ l'intensità di lei, e come il numero delle „ spinte recate al corpo. Questo numero „ di spinte, o è poi proporzionale al tempo, in che la Potenza opera sul corpo, „ o ad uno spazio, che questo ne descrive. „ Non può essere proporzionale al tempo, „ perchè da ciò se ne trarrebbe una conseguenza contraria all' equilibrio della Leva. „ Dunque dee esser proporzionale agli spazietti di accesso, o di recesso, ove salvasi l'equilibrio della stessa Leva.

§. 49. A questo Dilemma mi è sembrato potersi ridurre l'intero ragionamento del P. Riccati, e mi è riuscito scorgervi nelle sue parti, e nella forma alquanti nei, che senza adontare il merito di sì grande Analista ve l' indicherei fil filo, se la brevità non mel vietasse. Vi dico solamente esser falso

(a) Così ei scrive nella lett. 4. al P. [illegible]gilio Cavina.

Principio del divisato argomento, come quello, cui manchi una necessaria condizione: ed è, che l'*azione di una Potenza, la quale si applichi ad un corpo, non è mai come il numero delle spinte, ch'ella gli reca, e come l'energia di ciascheduna; se il corpo non istia isolato dagli altri, affinchè quivi si potessero ragunar tutte, e niuna potesse diffondersi ad altri corpi, nè elidersi da altre forze*. Or le braccia della Leva sono connesse fra loro, ed entrambe sul di lei sostegno impiantate: dunque gl' impulsi di una Potenza, che vi si applica, deggiono diffondersi per le braccia di tal Macchina, ed esserne in parte dal sostegno assorbiti. Nè quindi può francamente stabilirsi, che l'azione di una Potenza applicata alla Leva, o ad altra Macchina sia come il numero delle di lei spinte, e come l' energia di ciascheduna. E per chiarirvelo con qualch' esemplo, immaginatevi, che l'acqua stillando in una vasca vi si rammassi, ma che pe 'l di lei fondo trapeli sensibilmente, e che ne svapori al di sopra. Ditemi di grazia, concluderete mai, che l'acqua, la quale si trova raccolta nella vasca, sia come il numero delle goccie cadutevi, e come la quantità di ciascheduna? No certamente: dunque neppure potrà stabilirsi, che l'azione di una Potenza, le di cui spinte sono impresse ad un corpo, che ad altri continuamente le diffonde, e le disperge, sia come il numero di esse spinte; e come l' energia di ciascuna.

PRINCIPIO D' EQUIVALENZA.

§. 50. Il Principio d' Equivalenza è lo stesso Principio della Composizione, e Risoluzione delle forze, di che vi ragionai a disteso nel Capo VII. della Meccanica, e che di nuovo quì vi reco per rimembrarvelo. DUE FORZE, CHE INSIEME AGISCONO IN UN CORPO, SONO EQUIVALENTI AD UNA SOLA RAPPRESENTATA NELLA QUANTITA', E DIREZIONE DALLA DIAGONALE DI QUEL PARALLELOGRAMMO, I DI CUI LATI ESPRIMONO LE RESPETTIVE QUANTITA', E DIREZIONI DI QUELLE FORZE. La sua verità punto non dipende d'altro Principio della Statica; ed ella poi da se sola vale a mostrarne le condizioni d' equilibrio nelle Macchine comunque animate da quante forze si vogliono: onde per tai pregj parmi, che questo Principio agli altri due si debba preferire. La gloria d' averlo ritrovato deesi al Gran Galilei (*a*), ed al Varignonio d' averlo saputo alla Statica innestare. Ma l' Immortal (*b*) Newton avendolo nella più semplice, e general maniera esibito ne' suoi Prin-

(a) Prop. II. Giorn. 4. Dial.
(b) Cor. II. Legg. III. del Moto.

Princip. Matem., mi ha impegnato a dimostrarvelo quaggiù chiaramente.

§. 51. Defin. XVII. Quì per *verga immateriale* intendo quella, ch'è ben diritta, rigida, e sottile, nè ha poi peso, nè inerzia nelle sue parti.

§. 52. Defin. XVIII. Ed ella si dirà *raggio immateriale*, se circolarmente aggirisi intorno ad un suo estremo: e questo immobile estremo si dirà *centro di rotazione*.

§. 53. Defin. XIX. *Ruota immateriale* è un sistema di raggi immateriali, che in uno stesso piano, ed intorno al loro comun centro di rotazione sono volubili tutt' insieme.

Tal sarebbe la Ruota A a b B C, i di cui

Fig. 8. raggi A C, a C, b C, B C, &c. volgansi tutt' insieme intorno al punto C, e nello stesso piano A C B.

§. 54. Defin. XX. Chiamerò *forza normale* quella, ch'è applicata all'estremo di un raggio della Ruota, ma in guisa che la sua direzione stia nel piano della Ruota, ed insista perpendicolarmente ad esso raggio.

§. 55. Defin. XXI. E si dirà *forza obbliqua* quell'altra, cui manchi solamente l'ultima delle divisate condizioni, cioè che non abbia la sua direzione perpendicolare al raggio, ov'è applicata.

§. 56. Defin. XXII. L'angolo, che forma la direzion di una forza col raggio della

la

la Ruota, ov'è applicata, dicesi *angolo d'applicazione*.

B C A sia una Ruota immateriale volubile intorno al suo centro C, ed all'estremo del raggio C A siavi applicata una forza per la Fig. 10.
direzione A P, ch'è nel piano della Ruota; l'angolo P A C si dirà angolo di applicazione.

§. 57. Defin. XXIII. La Ruota A a b B C si volge nel *verso* A a b B, se la sua rota- Fig. 8.
zione facciasi secondo l'ordine delle lettere A, a, b, B, onde l'ho quì espressa.

§. 58. Defin. XXIV. Il *Momento* di una forza applicata ad un raggio di una Ruota immateriale è l'energia, ch'ella tiene a volger questa intorno al di lei perno.

§. 59. Defin. XXV. Più forze applicate ad una Ruota diconsi *consenzienti*, se ciascuna di esse cerchi d'aggirarla per lo stesso verso. E si diranno *dissenzienti*, se alcune di esse cerchino di volger la Ruota per un verso, e l'altre per l'altro.

§. 60. Supp. I. *Le direzioni delle forze, che agiscono nella Ruota per volgerla intorno al suo perno, supponghonsi giacer tutte nel di lei piano.* Questa condizione intendasi sempre, purchè non vene dichiari il contrario.

§. 61. Supp. II. *Esse forze saran considerate come pesi, affinchè la loro azione sia continua, ed uniforme.*

§. 62.

§. 62. Ass. I. *Se agli estremi de' due raggi uguali* C A , C a *della Ruota* A a b B C *siene* Fig. 8. *applicate le due forze normali* A F , a f , *uguali fra loro , e dissenzienti ; la Ruota resterà equilibrata , nè volgerassi per alcun verso .*

§. 63. Ass. II. *Se agli estremi de' raggi eguali* C A , C a , &c. *della Ruota* A a b B C *si applichino forze normali , dissuguali fra loro , e consenzienti ; il loro momento sarà quanto quello della somma di esse forze , perpendicolarmente applicata all' estremo di un di que' raggi , e per lo stesso verso di tali forze .*

PROP. I. TEOR.

§. 64. *Il Momento di una forza applicata all' estremo di un raggio di una Ruota è proporzionale all' intensità di essa forza , alla lunghezza del raggio , ed al seno dell' angolo d' applicazione .*

Dim. Le forze applicate agli estremi A , Fig. 9. ed a de' raggi C A , C a della Ruota A C a si chiamino F , ed f , e sieno M , ed m i loro momenti nell' aggirarla . Le lunghezze de' mentovati raggi si dicano R , ed r : e Φ , e φ sieno gli angoli C A R , Car formati dalle respettive direzioni delle forze F , ed f co' raggi R ed r. Dal centro C della stessa Ruota si calino C S , C s perpendicolari

lari sulle direzioni delle forze F , ed f ; e col centro C , e con un' intervallo maggiore di ciascuno di questi perpendicoli descrivasi nel loro piano il cerchio R r , che seghi in R , ed r le direzioni delle forze F , ed f ; e si congiungano i semidiametri C R , C r. Finalmente si tronchino sulle stesse direzioni le parti R P , r p proporzionali alle forze F , ed f , e da P , e p si menino P L , p l perpendicolari sulle tangenti del cerchio in R ed r. Saranno tra se parallele le due rette C R , L P , come perpendicolari alla stessa R L , e 'l di loro angolo esterno C R S pareggerà l' interno L P R. Dunque i due triangoli rettangoli C S R , R L P saranno simili fra loro : e per la stessa ragione il saran pure gli altri due C s r , r l p.

Ciò posto , immaginatevi , che le rette C R , R A , C r , r a sieno altrettante verghe rigide , ed immateriali connesse fra loro , e co' raggi C A , C a , e tutt' insieme volubili intorno a C , come se formassero una sola Ruota : e le forze applicate in A , ed a per A R , ed a r intendetele applicate in R ed r per le medesime loro direzioni R P , r p. Sarà chiaro , che la forza F applicata in A per A P tanto valga ad aggirarne la Ruota A C R , quanto applicata in R per R P. La qual cosa sarà anche vera rispetto all' altra forza f.

Si compia il parallelogrammo R Q P L , e la la forza R P intendasi risoluta nelle due laterali R Q, R L: sarà manifesto doversi elidere dalla fermezza del perno C la forza R Q, come quella ch'è impegnata per la direzione della verga C R contro di esso: ond'ella in niente contribuisce a volger la Ruota: laddove l'altra forza R L tutt'intera impiegasi ad aggirar la stessa Ruota, ed è il momento M della forza F (*a*). Dunque sarà F ad M, come R P ad R L, o pe' triangoli simili C S R, R L P, come C R a C S: e sarà quindi M. C R = F. C S. Nello stesso modo si dimostra che sia m. Cr = f. C s. Dunque sarà M. C R: m. C r :: F. C S: f. C s, cioè (*b*) M ad m in ragion composta di F ad f, e di C S a C s. Ma la ragione di C S a C s è altresì composta dalle ragioni di C A a C a, e del seno di C A S al seno di Cas (*c*), cioè in ragion composta di R ad r e di sen. Φ a sen. ϕ. Dunque sarà M : m :: (F : f) (R : r) (Sen. Φ : sen. ϕ). C. B. D.

§. 65. Cor. I. Supponendo M uguale ad m, dovrà esser d'uguaglianza la ragion, che si compone da quelle di F ad f, di R ad r, e di sen. Φ a sen. φ. E quindi F : f :: (r : R) (sen. φ : sen. Φ.). Cioè *se le forze applicate agli estremi de' raggi della Ruota* A C a *si equilibrino; le loro intensità debbono essere nella ragion inversa delle lunghezze de' raggi, cui sono applicate, e nell' inversa de' seni degli angoli di applicazione.*

(a) §. 58. Stat. e 222. Mecc.
(b) Essendo C R = Cr.
(c) Prenoz. XIV. Mecc.

§. 66. Cor. II. E supponendo esser d'uguaglianza una delle tre ragioni componenti di F : f, di R : r, e di sen. Φ : sen. φ, o quella, che n'emerga dalla composizion di due; dovranno nascerne altrettante verità particolari: ch' io quì ometto volentieri, e le lascio al vostro acume, che ne le ritragga.

§. 67. Cor. III. Tanto è il momento della forza F applicata all' estremo del raggio R della Ruota sotto l'angolo Φ, quanto il momento della forza $\frac{F. R. sen. \Phi}{X}$ perpendicolarmente applicata all' estremo del raggio X. Imperciocchè (64) il momento della prima forza non è, che F. R. sen. Φ; e 'l momento della seconda sarebbe $\frac{F. R. sen. \Phi}{X}$ X. Sen. 90° = F. R. Sen. Φ.

§. 68. Cor. IV. Agli estremi de' raggi R, R', R'', &c. di una Ruota sianvi sotto gli angoli Φ, Φ', Φ'', &c. applicate le forze F, F', F'', &c. che cerchino d'aggirarla per uno stesso verso: mentre per l'opposto cerchino d'aggirarla le forze f, f', f'', &c. applicate sotto gli angoli φ, φ', φ'', &c. agli estremi de' raggi r, r', r'', &c. *Sarà in caso d' equi-*

d' *equilibrio* F. R. Sen. Φ + F'. R'. Sen. Φ' + F.'' R.'' Sen. Φ'' + &c. *uguale ad* f. r. sen. ϕ + f.' r.' sen. ϕ' + f.'' r.'' sen. ϕ'' + &c. Imperocchè supponendo, che all'estremo di un raggio, la cui lunghezza sia X, si applichino insieme le forze normali (F. R. Sen. Φ) : X, (F'. R'. Sen. Φ') : X, (F.'' R.'' Sen. Φ'') : X, &c., le cui direzioni giacciano nel piano della Ruota, e l'aggirino per lo stesso verso delle prime forze F, F', F'', &c., sarà il momento di queste forze quanto il momento di quelle (67). E 'l momento delle altre forze f, f', f'', &c. sarà ben anche uguale al momento delle forze normali (f. r. sen. ϕ) : X, (f.' r.' sen. ϕ') : X, (f.'' r.'' sen. ϕ''.) : X, &c. supposto, che queste forze sieno applicate ad un'altro raggio uguale ad X, che abbiano le loro direzioni nel piano della Ruota, e la cerchino d'aggirare per lo stesso verso delle divisate forze f, f', f'', &c. Dunque in caso d'equilibrio dovrà essere (62)

$$\frac{\text{F. R. Sen. }\Phi}{\text{X}} + \frac{\text{F'. R'. Sen. }\Phi'}{\text{X}} + \frac{\text{F''. R''. Sen. }\Phi''}{\text{X}}$$

$$\text{\&c.} = \frac{\text{f. r. sen. }\phi}{\text{X}} + \frac{\text{f.' r.' sen. }\phi'}{\text{X}} + \frac{\text{f.'' r.'' sen. }\phi''}{\text{X}} \text{ \&c.}$$

cioè

$$\text{F. R. Sen. }\Phi + \text{F'. R'. Sen. }\Phi' + \text{F.'' R.'' Sen. }\Phi'' \text{ \&c.}$$

$$\text{\&c.} = \text{f. r. sen. }\phi + \text{f.' r.' sen. }\phi' + \text{f.'' r.'' sen. }\phi'' + \text{\&c.}$$

PROP. II. PROBL.

§. 69. ACB *sia una Ruota fornita de' due raggi disuguali* CA, CB, *ai di cui estremi agiscano per* AP, *e* BF *le forze obblique* P, *ed* F; *ritrovare in caso d'equilibrio con quanta forza n'è premuto il suo centro* C. *Fig.10.*

Sol. I.° Le direzioni PA, FB delle forze P ed F intendansi prolungate, finchè s'incontrino nel punto D: ed essendo dati i tre angoli ACB, DAC, CBD del quadrilineo ACBD, si saprà il quarto BDA. II.° Su i lati di questo angolo prendansi d'accanto al suo vertice le parti DM, DO proporzionali alle date forze P, ed F; e poi compito il parallelogrammo DONM vi si conduca la diagonale DN; *questa retta esprimerà la forza, onde il centro* C *n'è premuto.*

Dim. Si concepisca esser la retta CD, un'altro raggio immateriale, che alla Ruota ACB si appartenga. Sarà manifesto, che il momento della forza P applicata in A per AP sia quanto quello, ch'essa vi farebbe applicata in D per DP: e che tanto valga ad aggirar la Ruota la forza F applicata in B per BF, quanto se fosse applicata all'estremo D della verga ga C D, agendovi per D B. Dunque in caso d' equilibrio convien che queste forze P, ed F, applicate all' estremo D della verga C D sotto gli angoli C D A, C D B, non la rovescino nè a destra, nè a sinistra: e quindi la forza, che si compon dalle stesse P ed F, dovrà dirigersi per D C, ed esser combaciante colla D N forza media delle due D M, e D O, cioè (per costr.) di P ed F. Dunque la forza, onde n' è premuto il centro C, starà alla somma delle due forze P ed F, come il seno dell' angolo B D A alla somma de' seni degli angoli A D C, B D C (*a*). C. B. F.

§. 70. Cor. I. Se le direzioni A P, B F delle forze P ed F, che si equilibrano, sieno tra se parallele, cioè convergenti ad un punto infinitamente distante dal centro C della Ruota; gli angoli A D B, A D C, B D C saranno infinitesimi, e ad essi saran proporzionali i loro seni. Dunque il seno dell' angolo A D B dovrà pareggiar la somma de' seni degli angoli A D C, B D C. *E quindi in tal caso la forza premente il centro* C *sarà quanto la somma delle forze* P *ed* F.

§. 71. Cor. II. Le forze P ed F, cui per costruzione son proporzionali le rette D M, D O, sono al par di queste (*b*) nella ragion de' seni degli angoli N D O, N D M, cioè (prendendo C D per seno massimo) come le perpendicolari C T, C S calate dal centro C di rotazione sulle direzioni delle forze F, e P.

(a) §. 207. Mecc.
(b) §. 267. Mecc.

§. 72. Cor. III. Dunque *se le forze* P *ed* F *comunque applicate agli estremi de' raggi* C A, C B *della Ruota* A C B *si equilibrino; le intensità loro saranno inversamente come i perpendicoli calati dal centro della Ruota sulle direzioni di esse forze. E questo vuolsi intendere anche pe' raggi curvilinei di una Ruota.*

§. 73. Cor. IV. E perchè i cateti C T, C S de' due triangoli C T B, C S A rettangoli in T ed S sono come i seni (*a*) de' loro angoli opposti C B T, C A S, e come le ipotenuse C B, C A de' medesimi triangoli; *le forze* P *ed* F, *che si equilibrano nella Ruota* A C B, *sono inversamente come le lunghezze de' di lei raggi, ai di cui estremi sono applicate, ed inversamente come i seni degli angoli d' applicazione.*

§. 74. Cor. V. La Prop. precedente, ed i suoi Corollarj avrebbersi potuto agevolmente dimostrare col principio, che ho adottato nella dimostrazione di questo Problema: cioè *che i momenti delle forze* P, *ed* F *applicate per* A P, *e* B F *ne' punti* A, *e* B *sieno identici a' momenti delle stesse forze applicate all' estremo* D *della verga* C D *per le loro medesime direzioni* D P, D F.

C 2 §. 75.

(a) Prenoz. XIV. Mecc.

§. 75. Cor. VI. Finalmente la forza premente il centro C equivale alle due P ed F; imperciocchè quella è dinotata dalla diagonale D N del parallelogrammo D O N M, e queste da' di lui lati D M, D O; dunque *le tre rette* C D, A P, B F, *che son le direzioni delle stesse forze, dovranno tutte e tre concorrere ad uno stesso punto* (a), *e giacerne in uno stesso piano*.

C A P. III.

Dell' equilibrio nelle macchine semplici.

P R O P. III. T E O R.

Fig. 1. §. 76. *La Potenza* P, *e la Resistenza* R *per equilibrarsi nella Leva* A C B, *ove sono applicate, debbono essere nell' inversa ragione delle dilei braccia* C B, C A, *e de' seni de' respettivi angoli di applicazione* P B C, R A C.

Dim. Le braccia C B, C A della Leva A C B, o ch' ella sia diritta, o angolare, si chiamino R, ed r: gli angoli d' applicazione P B C, R A C dicansi Φ, e ϕ, e sia la Po-

(a) §. 217. Mecc.

tenza uguale ad F, la Resistenza uguale ad f. Sarà manifesto coll' identica dimostrazione del Teor. I. o di quella del §. 73., che stia F : f : : r. sen. φ : R. sen. Φ. C.B.D.

§. 77. Cor. I. Supponganśi tra se uguali gli angoli d' applicazione φ, e Φ; sarà F : f : : r : R; cioè *la Potenza, e la Resistenza applicate agli estremi delle braccia di una Leva per direzioni parallele deggiono essere nell' inversa ragione delle lunghezze delle braccia per equilibrarsi*.

§. 78. Cor. II. E può anche stabilirsi, che *la Potenza, e la Resistenza per equilibrarsi in una Leva, debbano essere nella reciproca ragione delle perpendicolari calate dal centro di moto sulle loro direzioni*.

§. 79. Cor. III. Ed applicandosi più forze ad un braccio di una Leva, ed altre, quante si vogliano, all' altro; non sarà malagevole intendere le condizioni dell' equilibrio di quelle forze, e di queste, sol che si sappia la Regola, ch' io vi proposi nel Coroll. IV. Prop. I.

§. 80. Cor. IV. E da' risultati dell' antecedente Probl. potrete valutar la pressione, che soffre il sostegno di una Leva, cui siensi applicate più forze tra loro equilibrate.

§. 81. Cor. V. Il momento di una forza applicata alla Leva, è come l' intensità di essa

essa forza, come il seno dell' angolo d'applicazione, e come la distanza del di lei sostegno dal punto, ove tal forza ne agisce. E chiamando respettivamente F, sen. Φ, ed R queste grandezze; sarà il momento della divisata forza a volger la Leva, come F. R. sen. Φ.

§. 82. Scol. I. Gli *Altaleni* adattati ad attigner l'acqua da' Pozzi di campagna, gli *Stantuffi* delle Trombe idrauliche, i *Remi*, gli *Alberi*, ed i *Timoni*, onde conduconsi le barche, non sono che Leve dritte: e son angolari i *Martelli*, che colla parte biforcata impiegansi a sveller de' chiodi saldamente fitti ne' corpi. Le *Forbici*, e le *Cisoje* son Leve dritte geminate, avendo per comun sostegno il loro nodo. E le *Tanaglie*, e le *Morse*, onde stringiamo i corpi, sono Leve angolari geminate, ove il comun sostegno è nel nodo, che le unisce. Ma chi può mai le varie Leve noverarvi, che, per renderne agevoli tanti usi, Natura, o Arte a noi ne ha date? (*a*)

§. 83.

(a) Basta indicarvi, che la maggior parte delle ossa del nostro corpo, destinate ad agevolar certe funzioni della nostra vita, non son che Leve di III.° genere, ove fan da Potenza i muscoli attaccati alle medesime ossa d' accanto a' loro centri di moto. Ed un' Anatomico, cui non incresca spiar la compage di tai solidi colla luce della Statica, potrà conoscere per iscienza qual meccanismo è in noi, e qual magistero vi si rile-

§. 83. Scol. II. Que' due usitatissimi strumenti, coi quali sogliamo saggiare i pesi de' corpi, e ragguagliarli, non son altro, che Leve. Il primo, che dicesi *Bilancia*, è un vette eterodromo, le cui braccia sono uguali nella lunghezza, e nel peso, ed han pendenti da' loro estremi due coppe uguali per vi si metter dentro que' corpi, che si voglion pesare. E poichè in questa Macchina l'equilibrio nasce dall' *equipondio*, cioè dall' egualità delle masse poste in amendue le coppe; vi voglion tanti contrappesi, quanti diversi pesi piacciane scandagliar ne' corpi (*a*). Ma l'altra Macchina, che *Stadera* si

C 4 do-

rileva del Mastro Eterno. Un mio compatriotto Gio. Alfonso Borelli si è distinto su questo argomento nell' incomp. Opera *de Motu Animalium*: ed io seguendo le sue vestigia vi rapporterò per esemplo questo solo Teorema, ed è, *che la forza del Muscolo Bicipite, e del Brachieo, quando tutto il braccio di un giovane robusto sia orizzontalmente disteso, ascende a* 560. *lib.* Imperciocchè il peso, che questo giovane può in tal sito sostenere colle sue dita, è di lib. 28., (computandovi il momento del peso dell' antibraccio): e la distanza, o la perpendicolare calata dal centro di moto sulla direzione di questa Potenza è la vigesima parte della lunghezza dell' antibraccio, e della mano, come si ha dall' Anatomia. Dunque (78) sarà la divisata forza muscolare a 28 lib., come 20 ad 1: ed essa forza uguale e 20. 28 lib. = 560 lib.

(a) Perchè una bilancia sia perfettissima, esigesi 1. che sieno equidistanti dal centro di rotazione que' due punti delle sue braccia, onde pendono le coppe. 2. Che domanda, è assai più comoda, e vantaggiosa della Bilancia. Ella è altresì un vette eterodromo, ma di diseguali braccia. Dal più corto pende una coppa da imporvisi que' corpi, che si voglion pesare; e pel più lungo scorre innanzi, e indietro un certo peso, che dicesi *Romano*, o *Piombino*: discostandosi, ed avvicinandosi alla *Trutina*, ov' è il centro di rotazione della Macchina. Ed i pesi de' corpi, che pongonsi nella coppa successivamente, non saran valutati da altrettanti contrappesi, com'è nella Bilancia, ma dalle varie distanze, cui dovrà allontanarsi dalla Trutina il Romano per equilibrarli.

PROP.

2. Che ciascuna di queste distanze sia la massima, che possa avere ciaschedun braccio della bilancia senza punto incurvarsi. 3. Che la retta, la quale unisce que' due punti, debba restar bisecata dalla perpendicolare abbassatale dal centro di rotazione 4. E che finalmente le coppe vuote debbano mantener la bilancia in sito eretto. Vedi Eularo *Volum. X. Comm. Pietr.*

PROP. IV. TEOR.

§. 84. *Si da l' equilibrio nell' Asse nella Ruota, se la forza normale applicata all' estremo di un di lei raggio stia a quel peso, che con tal Macchina vuol trarsi, come il semidiametro dell' Asse al semidiametro della Ruota.*

DIM. Sia E I G H L F l'Asse nella Ruota, e P quella forza normale, che applicata all' estremo del di lei raggio C P cerchi di volger colla Ruota il cilindro E G H F annessole, e di avvolgergli la corda N R attraente il peso R. Pe 'l punto N, ch' è l'ultimo di quei, che tien la corda adattati sul cilindro E G H F, intendasi condotto il lato cilindrico N A, che incontri in A la detta Ruota, e dal di lei centro al punto A si tiri la C A. E poi si concepisca il peso R trasportato in A, di dove agisca per una retta parallela alla N R: imperocchè il nesso, e la rigidezza dell' intera Macchina ne permette riunire insieme i punti N, ed A in quanto all' effetto, che vi cagionano la Potenza, e la Resistenza. *Fig.* 2.

Ciò premesso l' intera Macchina si vedrà ridotta alla Leva angolare P C A, ove in C risiede il punto d' appoggio, ed agli estremi P ed A delle sue braccia C P, C A sono applicate le forze normali P, ed R. Dunque in in virtù del Teorema precedente dovrà succedervi l'equilibrio, se stia P : R :: C A : C P : cioè si darà l'equilibrio in questa Macchina, se la forza normale applicata all' estremo di un raggio della Ruota stia al peso, che con essa Macchina vuol trarsi, come il semidiametro dell'Asse al semidiametro della Ruota. C. B. D.

§. 85. Cor. In questo Teorema ho tacitamente supposto, che la corda, cui è legato il peso da trarsi, non abbia gravità, nè spessezza. Ma volendosi tener conto di tali cose, converrà modificare il tema della Proposizione nel seguente modo. *Si da l' equilibrio nell' Asse nella Ruota, se la Potenza normale applicata all' estremo di un di lei raggio stia al peso del corpo, che si vuol trarre, ed a quello della corda, come la somma de' semidiametri dell' Asse, e della corda al semidiametro della Ruota.*

§. 86. Scol. Molte Macchine, che utilmente usiamo in tante congiunture, non son che Assi nella Ruota, tuttochè nel primo aspetto non pajan tali. Così il *Succhiello*, onde foriamo i corpi, gli *Argani*, e le *Burbere*, con cui traggonsi de' gran pesi, *il Timpano Calcatorio* adattato a varar le Barche, ed a nettare i Porti, le *Ruote dentate*, ed i *Rocchetti*, non son che Assi nella Ruota.

PROP.

PROP. V. TEOR.

§. 87. *Nella Carrucola Stabile* A C B *la Potenza* P *dee pareggiar la Resistenza* R *per equilibrarla. E nella Mobile* A O B *la Potenza* P *equilibrasi col peso* R, *che si vuol trarre, se stia* P *ad* R, *come il raggio della girella alla sottesa di quel di lei arco, su cui n' è incurvata la fune traente il Peso.* *Fig. 3. n. 1. e 2.*

Dim. Part. I. Basta condurre dal centro C della girella A C B a' punti B, ed A, ove la fune tocca il perimetro, le rette C A, C B, per intender chiaramente non esser questa Macchina, che una Leva di uguali braccia, come A C B, a' cui estremi sono perpendicolarmente applicate la Potenza P, e 'l peso R. Dunque (78) per darvisi l'equilibrio convien che P pareggi R.

Part. II. La retta B A sia la sottesa dell' arco A t B della girella mobile, sul quale n' è adattata la fune, che trae il peso. Sarà chiaro potersi ridurre questa girella ad una Leva di II.° genere, ove in A stia il sostegno premuto per A Q, ed ove la Potenza agisca per B P, e per r R la Resistenza. Sicchè da quello, che vi dissi nel §. 75, le tre rette A Q, B P, r R debbon trovarsi in uno stesso piano, e raccorsi tutte e tre

in

in uno stesso punto, affinchè in tal Macchina s'avveri l' equilibrio tra P ed R.

Sia N cotesto punto; saranno le due rette N A, N B tra se uguali, come tangenti menate da N sulla circonferenza di A t B. Dunque il triangolo A N B sarà isoscele, e la segante centrale N C, che biseca l' angolo delle riferite tangenti, dovrà bisecare ad angoli retti la B A base di esso triangolo. E congiunti i semidiametri C A, C B, l' angolo A C r sarà eziandio uguale all' altro B C r: e ciascun di essi quanto quello che nel segmento A O B si contiene (*a*), cioè a dire uguale all' angolo A B F (*b*).

Or essendosi qui da ultimo dimostrato esser l' angolo acuto A C r quanto l' altro ABF; se dal punto A conducasi A F perpendicolare su di B N, dovrà il triangolo rettangolo A C r trovarsi equiangolo, e quindi simile all' altro A B F, che n' emerge. Dunque starà A r : A C : : A F : A B, e permutando A r : A F : : A C : A B. Ma per l' equilibrio della Leva A r B dee stare (72) la Potenza P alla Resistenza R come A r ad A F: dunque dovrà esserne altresì P : R : : A C : A B. C. B. D.

§. 88. Cor. Che se nella girella mobile A O B si trovino tra se paralleli i tratti A Q, B P della fune P B t A Q; la retta A B, che passa

(a) 20. El. III.
(b) 32. El. III.

passa pe' contatti A, e B, dovrà attraversare il circolo A C B pe 'l centro, ed essergli un diametro. Dunque in tal caso *starà la Potenza al peso, come il semidiametro della girella al di lei diametro*, cioè *come* 1 *a* 2.

PROP. VI. TEOR.

§. 89. *Se il peso* P *posto sul Piano obbliquo* V N *sia tirato all' insù dalla Potenza* F, *la cui direzione* F P *giaccia nello stesso verticale, ov' è la lunghezza* P T *del Piano; sarà in caso d' equilibrio la Potenza al peso, com' è il seno dell' obbliquità del Piano, al coseno dell' angolo sotto cui vi s' inclina la direzione della Potenza.* Fig. 4.

Dim. Per P distendasi la verticale P L, sin che incontri in O il piano orizzontale B N; e poi si tronchino sulle rette P O, P X le parti P L, P F proporzionali al peso del corpo P, ed alla Potenza che per P F lo ritiene: e da' punti L ed F si abbassino le L M ed F E perpendicolari al piano V M, le quali (*a*) dovran cadere sulla P T di lui lunghezza: e finalmente compiansi i rettangoli P M L H, P G F E. Sarà la forza P L equiva-

(a) Mecc. §. 245.

valente alle due PM, PH, e la PF alle altre due PE, PG. E dovrà essere in caso d'equilibrio la forza PM uguale, e contraria alla PE. Imperciocchè, s'è possibile, sien diseguali coteste forze, e Px dinoti la direzione e l'eccesso della maggiore di esse sulla minore. E supposto, che le altre due forze PG, PH sieno uguali, onde per la loro opposizione abbiansi ad elidere, il corpo P animato dalla sola forza Px dovrà muoversi per la direzione PE, per la quale anche vi si condurrebbe, quando la forza PH vogliasi maggiore della sua opposta PG. Imperciocchè l'eccesso di quella su questa resterebbe eliso dalla fermezza del piano VN, onde nel corpo P non sarebbe operosa che la sola forza Px. E finalmente se vogliasi la forza PG maggiore dell'altra PH, e che Py dinoti la direzione e l'eccesso della maggiore sulla minore; il corpo P sarà insieme animato dalle due forze Px, Py, onde dovrà condursi per una media direzione. Le quali cose ripugnando alla natura dell'equilibrio ne fan concludere, che la forza PM debba pareggiare l'altra PE.

Ciò premesso sta PF a PE, come il raggio al coseno dell'angolo FPE: ed è poi PM a PL, come il seno dell'angolo PLM, o del di lui uguale PTO al raggio: dunque sarà per *equ. pertur.* PF a PL, come il seno di PTO al coseno di FPE. Cioè in tal Macchina sta la Potenza al peso, ch'ella sostiene, come il seno dell'obbliquità del piano al coseno dell'angolo, onde vi s'inclina la direzione della Potenza. C.B.D.

§. 90. Cor. I. Se la direzione della Potenza sia parallela alla PT lunghezza del piano inclinato, il coseno dell'angolo FPE sarà quanto il raggio. Ed in tal caso per l'*equilibrio convien, che la Potenza F stia al peso P, come il seno dell'obbliquità del Piano al raggio.*

§. 91. Cor. II. E se la direzion della Potenza, che ritiene il peso P sul piano VN, s'inclini a questo piano quanto è l'angolo PTO dell'obbliquità dello stesso piano; *sarà in caso d'equilibrio la Potenza al peso, come il seno dell'obbliquità del Piano al di lei coseno.*

PROP. VII. TEOR.

§. 92. *Nella Vite si da l'equilibrio, se la Potenza stia alla Resistenza, come un pane della Vite alla circonferenza, che ha per raggio l'intera lunghezza del manubrio.*

Dim. Sia RP il Manubrio di questa Macchina, al di cui estremo P siavi applicata una forza normale per la direzione Pp parallela ad una sezione circolare, che può Fig. 11.
far-

farsi nel cilindro, ov'è rilevata la Vite: e l'altro estremo R descriva col suo moto una spira, di cui l' archetto Q S siane una parte infinitesima: e finalmente il Manubrio P R intendasi disteso fino all' asse dello stesso cilindro: onde P C sia l'intera lunghezza dello stesso Manubrio.

Ciò premesso, l'intero peso del corpo, che spingesi con della Vite, cioè la Resistenza di questa Macchina, intendasi raccolto nel corpicciuolo R, il quale posando sul piano obbliquo R Q siavi ritenuto dalla sola forza F per F R parallela a P p. Sarà questa forza al peso R (91) come il seno dell' angolo F R t al coseno dello stesso angolo, cioè (*a*) come un pane della vite, che si dica π alla circonferenza, che ha C R per raggio.

E poichè il momento della Potenza P applicata in P per P p è quanto quello della forza F applicata in R per F R: perciocchè sì quella, che questa equilibrasi separatamente col peso R; sarà (78) P ad F come C R a C P, o come la circonferenza di C R a quella di C P. Ma si è mostrato quì sopra esserne F ad R, come un pane della Vite alla circonferenza di C B. Dunque per equalità perturbata starà P ad R, come un pane della

(a) Prenoz. I. Tom. II.

la Vite alla circonferenza di C P. C. B. D. (*a*).

§. 93. Scol. Tra tutti gli strumenti Meccanici ritrovati dall' uomo pe' suoi vantaggi mi sembra la Vite dovervi tenere il primo luogo, come quella, che non solo è potente a stringere con gagliardia certi corpi, ed a spignere ingenti pesi; ma occupa pochissimo luogo a far quegli effetti, che altri strumenti non farebbero, se non ridotti in gran Macchina. Sovvengavi, che i Torchj, onde si spreme il vino da' grappi d'uve già calcati, e l'olio dalle olive, non son che Viti: e di tal genere son pure le Morse de' Fabbri, i Torchj de' Librai, ed altre simiglianti Macchine. Ma vi recherà maraviglia l'intendere, che per mezzo di viti riuscì a Geremia Lorsoni sollevare per più palmi il Campanile di S. Lorenzo in Rotterdam, per rifarvi le infradiciate di lui fondamenta, sulle quali il posò poi diritto, e saldo.

D LEM-

(a) Alcuni han preso per principio di questa dimostrazione, che la Potenza vi descriva la circonferenza di un cerchio, mentre la Resistenza si sollevi per uno spazio uguale ad un pane della Vite. Ma ciò è falso: poichè la Potenza aggirando l' estremo del manubrio non vi descrive un cerchio, ma una spira.

LEMMA

§. 94. *Sia* F C G *una Leva angolare di uguali braccia, a' cui estremi sieno applicate le Potenze normali per* G D, *ed* F D, *che si pareggino; il sostegno* C *sarà premuto per una retta, che biseca l' angolo della Leva, e tal forza premente sarà alla somma delle forze normali, come il raggio al seno della metà dell' angolo della Leva.*

Fig. 6.

Dim. Le direzioni delle forze normali si prolunghino, finchè incontrinsi nel punto D, di dove si tiri la D C all'angolo della Leva, e si unisca la G F. Sarà CD^2 uguale a CG^2 con GD^2, e lo stesso CD^2 uguale a CF^2 con FD^2. Dunque i due quadrati di C G, e di G D saranno uguali a que' che si fanno su di C F, e su di F D: onde tolti gli uguali CG^2, e CF^2, dovrà rimanervi GD^2 uguale ad FD^2, e quindi G D uguale ad F D. E ritrovandosi di uguali lati i triangoli G C D, F C D, dovrà esser l'angolo G C D uguale all' altro F C D, e G D C uguale ad F D C: e finalmente C E perpendicolare a C F: imperciocchè la C E, che biseca l' angolo verticale del triangolo isoscele G C F, dee ad angoli retti bisecarne la di lui base.

Si prenda E O uguale ad E D, e si congiungano le G O, ed F O; saranno queste uguali, e parallele alle opposte F D, e G D, e quindi sarà un rombo la figura G D F O. E poichè le uguali rette G D, F D possono dinotare le forze normali applicate in G ed F per G D, F D, che si son supposte uguali; la forza, loro equivalente, sarà espressa dalla D O (212 Mec.), che sarà quella, onde n'è premuto (69) il sostegno C. E quindi le due forze normali staranno a questa pression del sostegno, come G D + D F a D O, cioè prendendo le metà di queste grandezze, come G D a D E, o come G C a G E, o finalmente come il raggio al seno dell' angolo G C D, ch'è metà di G C F. E quindi la somma delle proposte forze normali starà alla pressione, che n'emerge sul sostegno C, come il raggio al seno della metà dell' angolo della Leva, e tal pressione si farà per quella retta, che biseca lo stesso angolo. C. B. D.

§. 95. Cor. Si prolunghino le due verghe C G, C F in A, e B, sicchè sieno C A, e C B fra se uguali, e si congiunga A B, la quale convenga in R colla C D protratta. E poi si concepisca una forza premerne il punto R per R O, quanto il sostegno C n'è premuto per C r. Sarà chiaro doversi questa nuova forza equilibrare colle due G D, F D, ancorchè la Leva non istia impiantata sul sostegno C: e sarà *questa forza premente il punto* R *alla somma delle forze normali* G D, F D, *come il seno della metà dell' angolo* A C B *al raggio.*

PROP. VIII. TEOR.

§. 96. *Se il Cuneo si consideri come quella Leva, di che vi ho discorso nell' antecedente Lemma; sarà in caso d' equilibrio la Tenacità del corpo fenduto dal Cuneo, a quella forza normale, che dee premerne il dorso di tal Macchina, come il raggio al seno della metà dell' angolo del Cuneo.*

Fig. 6.

Dim. Il Cuneo A C B fendendo col suo taglio il solido S X abbiavi intrusa la sua parte G C F, mentre le parti dello stesso solido staccate dal contatto loro ne premano amendue le facce di tal Macchina. Il triangolo isoscele A C B sia una sezione del Cuneo parallela a ciascuna base di esso, e nella parte G C F dello stesso triangolo, la quale sta immersa nel solido S X, si meni, ove ne piaccia, la G F parallela ad A B. E poi suppongasi, che le parti staccate dal Cuneo agiscano solamente in G ed F con forze uguali, e normali ai lati C A, C B del divisato triangolo. Sarà chiaro da ciò, che ho rilevato nel Corollario del precedente Lemma, che, per equilibrare le due forze G D, F D, ne abbisogni un' altra, la quale agisca per la retta R C bisecante l' angolo A C B, e che le medesime due forze le serbino quel rapporto, che ha il raggio al seno dell' angolo A C R. Dunque si darà l' equilibrio in questa Macchina se la Tenacità del corpo S X stia alla forza del peso R, che dee premere il dorso del Cuneo per fenderne quel corpo, come il raggio al seno della metà dell' angolo del Cuneo. C. B. D.

§. 97. Cor. Di quì si raccoglie, che tanto più facile ne riesca fendere un corpo, quanto in parità di altre circostanze è più acuto l' angolo del Cuneo, che vi si adopera.

§. 98. Scol. Tutti quegli strumenti, co' quali sogliamo fendere, tagliare, e forare varie materie, come le *Asce*, le *Scuri*, le *Zappe*, i *Coltelli*, le *Spade*, i *Chiodi*, &c. non sono altra cosa, che Cunei.

§. 99. Scol. I. Qual differenza non v' ha tra' corpi per la varia coesione delle loro parti, e pe 'l vario modo, con cui resistono ad ogni altro, che vi s' intrude! Sovvengavi, che per tal ragione sogliamo classificarli in molli, in duri, in elastici, in tenaci, in fissili, &c.: che gl' individui di ciascuna loro classe non abbiano nello stesso modo, ed in pari grado quella qualità, che li distingue: e che questa neppur si rinvenga uniformemente in uno stesso corpo ripartita. Ma

Ma prescindendo da tali anomalie, chi può mai la forza percuziente colla tenacità del corpo fenduto ragguagliare? La forza della percossa, come vel dissi altrove (*a*), fu creduta dal Galilei, e da' di lui seguaci essere infinita riguardo alla forza premente: ed i Leibniziani tengono per eterogenee coteste forze, ed incapaci di paragone. Quindi è che tali cose mi han vietato proporvi un Teorema assoluto sull' equilibrio del Cuneo, e ve l' ho quassù condizionalmente indicato, spargendo alquante supposizioni nel tema, e nella dimostrazione del Teorema presente. E da quì rileverete perchè la considerazione di questa Macchina abbia tanto rivolto il cervello de' Geometri, e de' Fisici, non solo per iscovrirne le leggi dell' equilibrio, che per rapportarla ad un' altra semplice. In fatti Aristotile credè il Cuneo un doppio vette A G C, B F C co' due sostegni in G, ed F. Guidone Ubaldo disse, che coteste Leve avevano un comun sostegno nel punto C: ond' erano di secondo genere, e non già del primo, come aveva opinato lo Stagirita. Il gran Newton ha riferito il Cuneo ad un piano inclinato: e, se mi si menan buone quelle supposizioni, che ho sparse in questo Teorema, una tal Macchina potrà ridursi ad una Leva angolare di uguali braccia.

§. 100.

(a) Nota (a) §. 45.

§. 100. Scol. II. Le Macchine semplici possono ridursi a quattro solamente, cioè alla Leva, all' Asse nella Ruota, alla Girella, ed al Piano inclinato; *le quali non son altro, che diverse combinazioni di tre forze equilibrantisi, applicate ora ad un punto, ora ad una linea, ed ora ad un triangolo*.

§. 101. Scol. III. Non furono gli Astri, come opinò Vitruvio, che colle diurne loro rivoluzioni determinarono gli uomini ad inventar le Macchine semplici, e ad usarle. L' acume umano rischiarato da una fedele sperienza potè agevolmente rinvenirle quaggiù fra noi, senza farle scendere dall' alto. Ed ecco il progresso di tali Invenzioni.
„ Non sì tosto gli uomini cominciarono ad
„ usar le proprie braccia, che conobbero i
„ vantaggi *delle Leve, e de' Piani obbliqui*, e
„ dovettero impiegar queste Macchine per
„ comodo della loro vita. Ma colle Leve,
„ e co' Piani obbliqui non si possono, che
„ a picciole altezze sollevare i pesi: onde,
„ cred' io, che il bisogno spingendo la lor
„ ragione gl' inducesse a ritrovar *la Girella*
„ *stabile, la Mobile, e l' Asse nella Ruota*, le
„ quali Macchine non son che Leve perpetue
„ (*a*), e potenti a trarre i corpi da una gran
„ distanza: e che per un simile impegno essi
„ n' escogitassero la *Vite*, ch' è un piano in-

D 4 „ cli-

(a) Vedete ciò, che si è detto ne' §§. 87., 84.

„ clinato ravvolto ad un cilindro. Il Cuneo „ finalmente, qualunque sia quella Macchina „ semplice cui si rapporti, ha potuto fars' „ intender di per se stesso da' primi uomi- „ ni. „ E quindi non v'è bisogno ripeter dagli astri sì utili invenzioni.

C A P. IV.

L' EQUILIBRIO NELLE MACCHINE COMPOSTE.

§. 102. DEFIN. XXVI. IN una Macchina dicesi *Esponente dell' Equilibrio* quella ragione, che dee serbar la Potenza alla Resistenza per equilibrarvisi.

Così l' esponente dell' equilibrio nell' Asse nella Ruota è *la ragion del semidiametro del cilindro al semidiametro della Ruota*. E nel Piano Inclinato egli è la *ragion del seno dell' obbliquità del piano, al coseno dell' angolo, sotto cui vi s' inclina la direzion della forza*. Ma qui appresso indicherò in generale quest' esponente per la frazione r : R.

PROP.

PROP. IX. TEOR.

§. 103. *L' Esponente dell' Equilibrio in una Macchina composta è il prodotto degli Esponenti dell' equilibrio di tutte quelle semplici, da cui ella n' è combinata.*

DIM. Supponete essere A, B, C quelle Macchine semplici, dalla combinazion delle quali siasi formata la Macchina composta M: e che la prima di quelle vengane immediatamente animata dalla Potenza F: laddove l' altra B sia animata da A, e poi da B l' ultima C, che immediatamente agisca sulla Resistenza P. E finalmente gli esponenti dell' Equilibrio in esse Macchine A, B, C esprimansi per le respettive ragioni di r : R, di r' : R', e di r'' : R''.

E poichè dalla supposizione la Potenza F equilibrasi colla Resistenza P; il momento di F dovrà pareggiare il momento di quella forza, che la Macchina A imprime nell' altra B, che l' è contigua (*a*). Sicchè chiamando X la forza, che dalla Macchina A imprimesi a B; sarà F : X :: r : R (102). Inoltre il momento della forza X dee puranche uguagliare il momento della forza, onde la Mac-

(a) L' equilibrio in una Macchina Composta non può aver luogo, s' ei non vi sia puranche in quelle semplici, ond' ella n' è combinata.

Macchina B anima C al moto. E chiamando Y questa tal forza; sarà anche $X : Y :: r' : R'$ (102). Ma la forza Y immediatamente opponesi alla Resistenza P, e l'equilibra: dunque per la stessa ragione dovrà stare $Y : P :: r'' : R''$. Ma la ragione di $F : P$ è composta dalle ragioni di $F : X$, di $X : Y$, di $Y : P$ (a). Dunque dovrà stare $F : P :: (r : R)\,(r' : R')\,(r'' : R'')$. Cioè $F : P :: r r' r'' : R R' R''$.

Che se le Macchine semplici, onde n'è combinata la Macchina M, sieno più che tre; in simil guisa potrà conchiudersi, che in caso d'equilibrio debba starvi $F : P :: r r' r''$ &c. $: R R' R''$ &c. C. B. D.

PROP. X. TEOR.

§. 104. *Nel sistema di Ruote dentate, qual vi descrissi nella defin. XIII. vi sarà l'equilibrio tra la Potenza F, e 'l peso P, se stia F à P come il prodotto de' raggi de' rocchetti al prodotto de' raggi delle Ruote.* Fig. 12.

Dim. Questa Macchina, come vel dichiarai nella cit. defin., è un'aggregato degli assi nelle Ruote, i quali sono c b B A, c' b' B' A', c'' b''

(a) Pronoz. I. Mecc.

B'' A'', &c. Dunque chiamando r, r', r'', &c. i respettivi raggi de' rocchetti, ed R, R', R'', &c. quei delle Ruote; saranno gli esponenti dell'equilibrio nelle Macchine c b B A, c' b' B' A', c'' b'' B'' A'' &c. respettivamente uguali ad $r : R$, $r' : R'$, $r'' : R''$, &c. (102). Dunque in tal sistema di Ruote dentate succederà l'equilibrio se stia $F : P :: r r' r''$ &c $: R R' R''$ &c. C. B. D.

PROP. XI. TEOR.

§. 105. *Si avvera l'equilibrio nella Vite Perpetua, se la Potenza* F *stia al peso* P, *che vi si trae, come il semidiametro* C b *del cilindro al manubrio* A F *moltiplicato pe 'l numero de' denti della Ruota* N B M. Fig. 13.

Dim. Pongasi uguale a π un pane di questa Vite, e ad R ed r i semidiametri della Ruota dentata, e del cilindro: e le circonferenze di essi raggi sieno respettivamente uguali a C, e c. Inoltre si chiami g la lunghezza del Manubrio, G la di lui periferia, ed n il numero de' denti della Ruota.

E poichè questa Macchina è un composto della vite F A B R, e dell' Asse nella Ruota N B M C b, e l'esponente dell' equilibrio di questa prima Macchina (92) è $\pi : G$; laddove quello dell'altra è $r : R$, o pure $c : C$; sarà per la la IX. Prop. $F : P :: (\pi : G)(c : C)$, o pure $F : P :: (\pi : C)(c : G)$. Ma la prima di queste due ragioni componenti è uguale a quella di $1 : n$, e la seconda è quanto quella di $r : g$. Dunque sarà $F : P :: (1 : n)(r : g)$, cioè $F : P :: r : gn$. C. B. D.

PROP. XII. TEOR.

§. 106. *Nel Polispasto descrittovi nella defin. XV. si darà l'equilibrio, se la Potenza E stia al peso P, come l'unità al numero de' tratti della fune, che vi si circonduce per le girelle, diminuito dell'unità.*

Fig. 14.

Dim. I tratti BR, AQ, &c. della fune STNQABRMF sono ugualmente stirati dal peso P, e si giaccion tutti paralleli tra loro: dunque la tensione di ciascun di essi starà al peso P, come l'unità al numero de' tratti della fune tesi dalla Resistenza P. Or in caso d'equilibrio la Potenza F dee uguagliare la tensione del solo tratto RB: dunque in tal caso starà la Potenza F al peso P come l'unità al numero de' tratti della fune, che vi tende lo stesso peso P. C. B. D.

§. 107. Cor. In uno sistema di girelle mobili, ciascuna delle quali sia circondotta da una fune distinta da quelle delle altre, vi si darà l'equilibrio tra la Potenza F, che le

le anima, e tra il peso P, che vi si trae; se stia $F : P :: 1 : 2^n$; supposto che n dinoti il numero delle girelle mobili. La qual cosa raccogliesi agevolmente dalla Prop. IX.

CAP. V.

Saggio di alcune Resistenze, che produconsi nelle Macchine in moto.

§. 108. In ogni Macchina in moto si debbono considerar due specie di Resistenze, cagionatevi da quelle di lei superficie, che si muovono premendosi vicendevolmente. La prima di esse dicesi *Attrito*, *Frizione*, o *Stropicciamento*, e l'altra può dirsi *Adesione*.

§. 109. Le Sinuosità, e le ruvidezze de' corpi, chi nol sa, quanto variino all' infinito! e per le diverse loro tempere, e per la varia dose di calore, e di umido, onde di tempo in tempo impregnasi ciascun di essi. La pressione de' corpi, che si stropicciano, alla quale proporzionasi l'Attrito loro, non è sempre la stessa, nè uniformemente da per ogni dove ripartita. E poi al rendersi men sinuose, e prominenti le superficie de' corpi, che si strofinano, più gagliarda vi si eccita quella for-

forza di adesione, che seco gli unisce, ed inchioda. Dunque niun Analista, benchè sagace, e franco, potrà calcolare rigidamente ed a priori quelle Resistenze eccitate in una Macchina dalle dilei parti, che stropiccIansi, ed assegnarvi delle sicure regole universali. E se sperimentando consultisi Natura, chi avrà mai l'ardimento di render generali i risultati di sperienze sì ristrette, e particolari? Ma non di meno giova, ch'io quì vi rechi alcune poche regole sull'Attrito de' corpi, affinchè saggiamente nella pratica vi guidiate.

§. 110. Reg. I. *L'Attrito di un corpo, che va stropicciando una superficie alquanto pulita, e liscia, è pressochè una terza parte della di lui pressione.*

§. 111. Cor. I. Secondo la varia politura del corpo, e della superficie orizzontale, ch'ei strofina, diversa è la parte del di lui peso P, cui agguagliasi l'attrito. Onde generalmente può definirsi, che l'attrito di uno stesso corpo stropicciante una stessa superficie, sia la parte n del di lui peso, cioè uguale a (P) : n.

§. 112. Cor. II. In questa regola annidasi un duplice paradosso: cioè l'attrito di uno stesso corpo stropicciante una stessa superficie non cangia punto di energia, tuttochè si accresca, o si diminuisca la di lui parte, che

che vi strofina. Ed esso attrito è come la velocità, onde il corpo vi si muove (*a*).

§. 113. Reg. II. *Un peso, che si trascini su di un piano orizzontale vi soffre in parità di altre circostanze il menomo attrito, se la direzion della Potenza, che il trae, inclinisi all' orizzonte sotto quell' angolo, che abbia per tangente* $\frac{1}{n}$.

Questa regola non nasce dalla sperienza, com'è l'antecedente, e son quell'altre, che *Fig. 5. n. 2.*
qui soggiungo; ma vuol esser dimostrata. Per la qual cosa sia ACE il piano orizzontale, su cui si strascini dalla Potenza p il peso P sotto l'angolo MCE $= \phi$. E presa nella direzion della Potenza la parte CM $=$ p, si cali dal punto M la ME perpendicolare sul detto piano orizzontale: e nel piano verticale CME si compia il rettangolo MECN; sarà ME $=$ p. sen. ϕ, e CE $=$ p. cos. ϕ. E poichè la Potenza CM equivale alle due for-

(a) Il primo Geometra, che abbia ragionato sull' Attrito de' corpi, ed a cui si dee l'invenzione di questa I. Regola, fu il Sig. Amontons nelle *Memoires de l'Academ. an.* 1699., e dopo di lui vi si distinsero il Sig. Parent *Histoire de l'Acad.* 1700., 1704., e'l Sig. de Camus nel *Traitè des forces mouvantes*. Ma Pietro Muſchembroeck, e'l Dottor Desaguliers con sicure, e copiose sperienze han chiarita questa Teoria: ed è riuscito al Sig. Bulfingero *Vol. II. Pietrob.* ed al Chiarissimo Daniele Bernulli *Vol.* XIII. *Piet.* d'illustrarla con calcoli giudiziosamente guidati a fine.

forze CN, CE, sarà lo stesso tirare il peso P colla Potenza p, che tirarlo colle due forze p. sen. φ, e p. cos. ϕ per le direzioni CN, CE. Or la prima di queste forze, poichè diretta da C verso N, non fa che alleggerire il peso P: onde la pressione di tal corpo sull'orizzonte non sarà P, ma P — p. sen. ϕ, e l'attrito (111), che vi si produce, sarà $\frac{P - p.\ sen.\ \phi}{n}$: e l'altra forza CE, o p. cos. ϕ dovrà pareggiare tal frizione. Dunque sarà (P — p. sen. φ) : n $=$ p. cos. ϕ. E quindi p $=$ P : (n. cos. ϕ + sen. ϕ). Or dovendo essere p un minimo, il denominatore della frazione P : (n. cos. ϕ + sen. ϕ) dovrà essere un Massimo. E quindi per le ovvie regole del Metodo de' Massimi, e de' Minimi sarà D (n. cos. φ + sen. ϕ) $=$ o, cioè $=$ d ϕ. cos. φ — n d φ. sen. φ $=$ o. E riducendo questa equazione avrassi

$$\frac{1}{n} = \frac{sen.\ \phi}{cos.\ \varphi} = Tang.\ \phi.$$

§. 114. Cor. I. E supponendo n $=$ 3, sarà Tang. $\phi = \frac{1}{3}$: cioè φ $=$ 18°, 26' a un di presso.

§. 115. Reg. III. *In una Macchina se la velocità delle parti stropicciate pareggi la velocità della Potenza; l'attrito sarà $\frac{2}{3}$ di essa Potenza: e se la velocità di quelle parti stia alla velocità della Potenza, come n ad m; l'attrito sarà $\frac{2\,n}{3\,m}$ della Potenza.*

Sia BEIGDHLF un'Asse nella Ruota, e'l diametro di questa sia di 3 pied., e di 6 poll. il diametro dell'Asse, o del cilindro EFHG, il quale si vada co' suoi estremi stropicciando ne' due fori circolari GA, EF fatti ne' suoi sostegni x y, X Y. Sarà la velocità dello stropicciamento alla velocità della Potenza come 6 poll. a 36 poll., cioè come 1 a 6: vale a dire sarà n $=$ 1, ed m $=$ 6. Laonde se vi si applichi una Potenza di 108 lib.; la Resistenza, che per equilibrarla dee esser sestupla di essa, monterà a 648 lib.: e l'attrito, che si è detto esser $\frac{2\,n}{3\,m}$ della Potenza, sarà $\frac{2.\ 1}{3.\ 6}$ 108 lib. $= \frac{1}{9}$ 108 lib. $=$ 12 libbre. E poichè, per superare questo attrito, dovrebbersi alla Potenza aggiungere altre 12 lib., le quali sono come una nuova Potenza producente un nuovo attrito proporzionale al primo; n'emergerà nella Macchina dalla Potenza *addizionale* di 12 lib. un secondo attrito uguale ad $\frac{1}{9}$ 12 lib. $= \frac{4}{3}$ lib. E così procedendo innanzi, sarà l'intero attrito, che avrà la proposta Macchina, uguale a $\left(12 + \frac{4}{3} + \frac{4}{27}\ \&c. \right)$ lib. $= 13\frac{1}{2}$ lib. Fig. 21

E Che

Che se il cilindro EGHF abbia l' asse BD di ferro di un poll. di diametro, cioè una sesta parte di quello di esso cilindro; il divisato attrito sarà un sesto di quello, che quì da ultimo vi ho indicato.

§. 116. Similmente se un carretto, ove impongasi il peso P, abbia due ruote ciascuna di 6 piedi di diametro, e 'l diametro del loro asse sia di 4. poll.; l' attrito sarà $\frac{4}{72}$, cioè $\frac{1}{18}$ di quello, che vi si ecciterebbe trascinando quel peso sul terreno. E perchè questa frizione è quasi (110) uguale ad $\frac{1}{3}$ P; sarà l' attrito del carretto, ove non ci si consideri la gravità di esso, uguale ad

$$\frac{1}{3.18}P = \frac{P}{54}.$$

§. 117. Reg. IV. *Ungendosi d' olio, o di sego le superficie de' corpi, che si stropicciano; l' attrito loro si farà molto minore.* Imperciocchè con tal mezzo si diminuisce la scabrosità delle stesse superficie.

§. 118. Reg. V. *La rigidezza di una corda* (a), *cioè la difficoltà, che questa incontra ad avvolgersi ad un cilindro, è direttamente come il suo diametro, e 'l peso, che la distende, ed inversamente come il diametro del cilindro, su cui ella si avvolge.*

(a) La resistenza, che nasce dalla rigidezza delle funi, è stata esaminata dall' Amontons nelle *Mem. de l' Acad. an.* 1699., e dal Sig. Sauveur nelle *Mem. de l' Acad. an.* 1703. E 'l Sommo Eulero Vol. XX. *Comment. Petrop.* scrisse due analitiche dissertazioni *sulla pressione delle funi tese su i corpi sottoposti.*

L' accuratissimo D.r Desaguliers prese una girella stabile, ch' essendo di 3. poll. di diam. aveva un perno di un solo poll. di diam., e le circondusse una corda di diam. $1\frac{2}{3}$ poll. A' capi di questa legò due pesi, ciascuno di 800. libbre: e per saggiarne la resistenza, cui era soggetta tal Macchina, ne accrebbe gradatamente uno de' detti pesi, finchè preponderando all' altro il sollevasse. Or l' avreste mai creduto? Il peso *addizionale*, che ci volle a tal uopo, montò a lib. $436\frac{2}{3}$. che son maggiori della metà di ciascun peso: e tanto dovett' esser benanche la resistenza della girella nascente dallo strofinìo delle sue parti, e dalla rigidezza della corda. Dalle quali cose si raccoglie esser ben grande la resistenza della girella: e 'l potrete anche da ciò rilevare, che tanto il diametro del perno, che quello della corda circondottale son maggiori in proporzione al diametro di tal girella. Ma essendosi fatti girare intorno ad un pari perno, e con una simigliante corda, una girella di 24. poll. di diam.; il peso *addizionale*, che ne fece preponderare uno de' divisati pesi, non fu che di 45 lib.

E raccogliendo quanto sparsamente ho sin quì detto, e quanto da simiglianti sperienze si ritrae, vi dico, che tralle Macchine semplici la Leva, e 'l Piano inclinato diano pochissima frizione: che questa sia alquanto grande nell' Asse nella Ruota, e grandissima nella Girella, nel Cuneo, e nella Vite.

§. 119. Scol. In certe Macchine suol esservi un'altra resistenza, che viene dalla pressione cagionata loro dalla tension delle funi, che traggono de' gran pesi: e questa è di difficile investigazione. Ma nel Capo seguente vo' dimostrarvi que' principj, onde convien calcolare i Momenti d' inerzia delle Macchine, che si aggirano, e de' corpi, che si volgono comunque in giro. E la Teoria di queste inevitabili resistenze vuol essere chiaramente intesa non pur da' Candidati della Meccanica, ma da' medesimi Ingegneri, nella speculazione, e nella pratica profondamente consumati.

CAP.

CAP. VI.

Teoria del moto delle Macchine.

§. 120. Defin. XXVII. La *velocità angolare* di una verga rigida, e diritta, la quale giri circolarmente intorno ad un suo estremo, è l'angolo rettilineo, che in un dato tempuscolo genera tal verga.

§. 121. Defin. XXVIII. Un corpo rigido qualor si aggiri intorno ad una retta, ch' è in esso, si dirà avere un *moto giratorio*: e tal retta sarà l'*asse di girazione*.

§. 122. Cor. Tutti gli elementi di un corpo rigido, che ha moto giratorio, deggiono descrivere in un dato tempuscolo archetti circolari simili, i cui centri sono nell' asse di girazione. E questi son que' punti, ove le perpendicolari calate da quegli elementi sull' asse di girazione, lo incontrano.

§. 123. Defin. XXIX. Se da un qualunque elemento di un corpo rigido rotante si cali una retta perpendicolare all' asse di girazione; l' angolo, che in un dato tempuscolo genera tal retta, si dice *velocità angolare* dell' intero corpo.

§. 124. Cor. I. Siane A un punto del corpo rigido, che volgesi intorno all' asse C R, *Fig. 8. n. 2.*

E 3 ed

ed A C la perpendicolare calata dal punto A su di C R. In un dato tempuscolo descrivasi dal punto A l'archetto A M, e dalla C A l'angolo A C M; si dirà A M la velocità assoluta del punto A, e l'angolo A C M sarà la velocità angolare sì della retta A C, che dell'intero corpo rigido.

§. 125. Cor. II. Ed essendo l'angolo A C M uguale all'arco A M, che lo misura, diviso per lo raggio del di lui cerchio; *sarà la velocità angolare di cotesto corpo uguale alla velocità assoluta di un di lui elemento, divisa per la distanza, ch'ei tiene dall'asse di girazione*.

§. 126. Cor. III. Se la velocità angolare di un corpo rigido si moltiplichi per la distanza di un di lui elemento dall'asse di girazione; il prodotto sarà l'assoluta velocità dello stesso elemento. E lo stesso intendasi di una verga rigida circolarmente aggirata intorno ad un suo estremo.

§. 127. Cor. IV. La velocità angolare di un corpo rigido, che si volga intorno ad un'asse, è la stessa da per tutto: laddove le velocità assolute de' di lui elementi cangiano al variar delle loro distanze dall'asse di girazione.

§. 128. Defin. XXX. Si dirà *centrale* un'asse di girazione, se passi per lo centro d'inerzia, o di gravità del corpo rigido, che vi si volge intorno.

Eu-

Eulero chiama *centro d'inerzia di un corpo* quello, che sogliamo dire centro di gravità di esso; ch'è un punto entro della di lui massa, per cui ogni piano, che vi si conduce, la divide in due parti equiponderanti.

PROP. XIII. TEOR.

§. 129. *La verga immateriale* M C *sia volubile intorno al suo estremo* C, *ed abbia nell'altro estremo il corpicciuolo* M *spinto dalla forza normale* F; *dico essere la velocità angolare della verga direttamente come la forza* F, *ed inversamente come il prodotto del corpicciuolo* M *nella lunghezza della verga*. Fig. 8. n. 2.

Dim. Si concepisca un'altra verga m c immateriale, che giri circolarmente intorno al suo estremo c, e che abbia nell'altro estremo un corpicciuolo m spinto dalla forza normale f: e sieno gli archetti M A, a m contemporaneamente descritti da' corpicciuoli M, ed m, al par degli angoli elementari M C A, m c a, che vi generano le verghe M C, m c. Saranno gli archetti M A, a m come le velocità de' corpicciuoli (8. Mec.) M, ed m: e gli angoli M C A, m c a come le velocità angolari delle verghe (120). E poichè sta l'angolo A C M all'altro a c m come M A ad a m, e come m c ad M C: ed è poi M A ad a m come F ad f, e come m ad M (67. Mec.); sarà l'angolo A C M all'altro a c m come F ad f, come m ad M, e come m c ad M C. Cioè a dire le velocità angolari delle verghe immateriali M C, m c saranno direttamente come le forze normali F, f applicate a' loro estremi, inversamente come i corpicciuoli M, ed m quivi legati, ed inversamente come le lunghezze di esse verghe C. B. D.

§. 130. Cor. Se le verghe immateriali M C, ed m c si dicano R, ed r, e per V ed v esprimansi respettivamente le loro velocità angolari; sarà V : v :: (F : f) (m : M) (r : R).

PROP. XIV. TEOR.

§. 131. *Poste le medesime cose del Teor. prec.; le velocità angolari di due verghe immateriali dovran pareggiarsi, se le forze normali applicate agli estremi di esse verghe sieno inversamente come le loro lunghezze; e sien que' corpicciuoli inversamente come i quadrati delle stesse lunghezze.*

Dim. Ritenendo i simboli del cor. prec. sarà V : v :: (F : f) (m : M) (r : R). Ma in questo Teorema supponesi, che stia F : f :: r : R, ed m : M :: R R : r r. Dunque,

que, sostituendo le seconde ragioni di queste due analogie in luogo delle prime, avrassi V : v :: (r : R) (R R : r r) (r : R): cioè V : v :: r r R R : R R r r. E quindi V uguale ad v. C. B. D.

§. 132. Cor. I. Essendo per ipotesi F : f :: r : R; sarà F uguale ad (f r) : R. Ed essendo ancora m : M :: R R : r r, dovrà essere M uguale ad (m r r) : R R.

§. 133. Cor II. Dunque *la forza normale* f *spignendo il corpicciuolo* m, *ch' è all' estremo della verga rotante* r, *dee produrvi quella stessa velocità angolare, che vi produrrebbe la forza normale* (f r) : R *applicata all' estremo della verga* R, *ove siavi il corpicciuolo* (m r r) : R R.

PROP.

PROP. XV. TEOR.

Fig. 15. n. 1.

§. 134. *Se agli estremi de' raggi* CA, CB, CD, &c. *della Ruota immateriale* ACD *volubile intorno al punto* C, *ne sien legati i corpicciuoli* A, B, D, &c. *spinti respettivamente dalle potenze normali e consenzienti* Aa, Bb, Dd, &c.; *la velocità angolare dell' intera Ruota sarà direttamente come la somma de' momenti delle forze quivi applicate, ed inversamente come la somma de' prodotti di ciascun corpicciuolo nel quadrato della di lui distanza dal centro di rotazione.*

DIM. Si chiamino r, r', r'', &c. i raggi CA, CB, CD, &c. della Ruota. Sieno m, m', m'', &c. le masse de' corpicciuoli A, B, D, &c., ed f, f', f'', &c. l' energie delle forze normali, che gli spingono respettivamente. Si tiri nel piano della Ruota un' altro raggio CL, che si dica R: ed in luogo de' corpicciuoli m, m', m'', &c., che son legati agli estremi de' raggi r, r', r'', &c., intendansi sostituiti questi altri corpicciuoli $(m\, r\, r) : RR$, $(m'\, r'\, r') : RR$, $(m''\, r''\, r'') : RR$, &c. seco raccolti, e legati all' estremo L del raggio CL. E poi in luogo delle forze f, f', f'', &c., che spingono respettivamente que' primi corpicciuoli, si surroghi la somma delle forze $(f\, r) : R$, $(f'\, r') : R$, $(f''\, r'') : R$, &c. applicata in L perpendicolarmente su di CL: Sarà la velocità angolare della proposta Ruota, quanto quella, che avrebbe la verga immateriale CL, volubile intorno a C, caricata nel suo estremo di un corpo uguale ad $(m.\, rr + m'.\, r'r' + m''.\, r''r'' + \&c.) : RR$, ed animata (133) nello stesso estremo dalla forza normale $(f.\, r + f'.\, r' + f''.\, r'' + \&c.) : R$. Ma la velocità angolare di questa verga (129) esprimesi per l' energia della forza normale, divisa per lo prodotto del corpicciuolo nella di lui distanza dal centro di rotazione, cioè per $(f.\, r + f'.\, r' + f''.\, r'' + \&c.) : (m.\, rr + m'.\, r'r' + m''.\, r''r'' + \&c.)$; ove siensi fatte le dovute contrazioni. Dunque tanta sarà puranche la velocità angolare dell' intera Ruota immateriale. Ma il numeratore $f.\, r + f'.\, r' + f''.\, r'' + \&c.$ della divisata frazione è l' aggregato de' momenti delle forze normali, che agiscono nella Ruota (81), e 'l di lei denominatore $m.\, rr + m'.\, r'r' + m''\, r''\, r'' + \&c.$ è la somma de' prodotti di ciascun corpicciuolo nel quadrato della di lui distanza dal centro di rotazione. Dunque sarà vero quel, che ho inteso di dimostrare. C. B. D.

§. 135. COR. I. Ed *aggirandosi un corpo rigido intorno ad un' immobile asse, sarà anche vero che la sua velocità angolare sia come l' aggregato de' momenti delle forze, che vi agiscono,* *no, diviso per l' aggregato de' prodotti di ciascuna di lui particella nel quadrato della di lei distanza dall' asse di rotazione.*

§. 136. DEFIN. XXXI. *Momento d' inerzia* di un corpo rigido, o di un sistema di corpi, menati in giro intorno ad un' immobile asse, è la somma de' prodotti di ciascuna loro particella nel quadrato della di lei distanza dall' asse di rotazione (*a*).

§. 137.

(a) Un corpo rigido come cangia di sito riguardo a quell' asse, intorno a cui si aggiri, così cangiano di valore il suo *momento d' inerzia*, *la forza*, *che cerca di dissolverlo*, *e quell' altra*, *che a sostener l' asse ne abbisogna*. Che tutto ciò sia vero non si durerà fatica ad intenderlo: ma chi avrebbe osato prescriver de' principj, e delle guide analitiche, onde sicuramente calcolare cose sì sublimi, ed intralciate? Il solo Eulero ebbe il coraggio di determinarle con accurato calcolo, da' stabili principj dipendente: e tralle insigni verità, che vi raccolse, vi fu quella, *che ogni corpo rigido abbia men momento d' inerzia aggirandosi intorno ad un' asse centrale*, *che intorno ad un' altro*, *il quale gli sia parallelo*. *E che la differenza di questi momenti sia quanto la massa del corpo rotante*, *moltiplicata per lo quadrato della distanza dell' asse centrale dal non centrale*. Nè di ciò pago il Valentuomo volle ingradarsi a rintracciar quegli assi centrali di un corpo rigido, a' quali si appartiene un Massimo, o un Minimo momento d' inerzia: e se ve ne sian di quelli, che per sostenersi nella rotazion del corpo non abbiano bisogno di straniera forza. E chiamando i primi, *Assi Principali*, e gli altri, *Assi Liberi di girazione*, si avvisò, *che in ogni corpo rigido debbanvi stare tre Assi Principali*: *che questi perpendicolarmente si taglino nel centro d' inerzia*: *ch' essi sian pure tre Assi Liberi di Girazione*: *e che giovi adot-*

§. 137. COR. I. Dunque *la velocità angolare della divisata Ruota è in ragion diretta della somma de' momenti delle forze quivi applicate*, *ed in inversa de' momenti d' inerzia de' corpi*, *che vi si trovano*.

§. 138.

adottarli per quelle tre Direttrìci, *cui convien riferire il moto di un corpo rigido per determinarlo* (§. 241. Mec.).

Il Calcolo su tali investigazioni, e su di altre loro affini è registrato in quella Celebre Opera dello stesso Eulero, cui v' ha per *epigrafe* Theoria motus Corporum rigidorum. Ma questo Metodo fu dal Valentuomo simplificato in quella Dissertazione, ch' ei diede all' Accademia di Pietroburgo per l' an. 1776, e dalla quale giova trascrivervi le seguenti cose.

Pro inveniendo motu Corporum rigidorum I. quærebam centri gravitatis motum, quod nulla difficultate laborat. II. ad quodvis tempus determinabam positionem axis gyrationis, ejusque celeritatem. Et III. situm ternorum axium principalium, e qua investigatione ingens copia quantitatum variabilium emergebat. Hæc omnia III. de la Grange alia methodo pertractavit in *Act. Borus. an.* 1773. Sed primum ejus Lemma ita me deterruit, ut ob defectum oculorum non intellexi omnia ejus analytica artificia. Cum autem nuper, dum partem geometricam, cui ista investigatio innititur, accuratius evolvendam suscepi, hanc insignem proprietatem demonstrassem, quod *quomodocumque corpus rigidum e statu initiali in alium quemcumque statum fuerit translatum*, *in eo semper talis axis assignari possit*, *cujus directio in utroque statu maneat invariata*; hæc pulcherrima proprietas mihi statim visa est eximium subsidium suppeditare, unde omnia, quæ ad motum ejusmodi corporum pertinent, multo facilius, & sine tanta farragine tot quantitatum variabilium definiri possunt. *Postquam enim motus centri gravitatis fuerit definitus*, *in statu initiali ille quæra-*

§. 138. Cor. II. E *la velocità angolare di un corpo rigido, che si aggiri intorno ad un' immobile asse, è anche direttamente come la somma de' momenti, che lo fan volgere, ed inversamente come il di lui momento d' inerzia.*

§. 139. Scol. I. La verità di questo Corollario è come un Principio generale, onde debbonsi valutare le forze giratorie *nelle Leve, negli Assi nelle ruote, nelle altre Macchine sì semplici, che composte, in tutti i corpi rigidi rotanti, e finalmente in qualunque Sistema di corpi, che seco uniti volgonsi intorno ad un' asse fisso*. Ma prima ch' io passi più oltre, voglio dichiararvi, perchè mai la somma de' prodotti di ciascun corpicciuolo rotante nel quadrato della di lui distanza dall' asse di rotazione siasi detta *Momento* d' *inerzia*, e quanto sia questo nelle *Leve prismatiche*, e *negli Assi nelle Ruote*: la prima delle quali cose io quì vi espongo nello Scolio II., e le altre due ne' due Teoremi, che il seguono.

§. 140. Scol. II. Si è rilevato nel §. *67*. della Meccanica, che la velocità di un corpo, che va per dritto, sia direttamente come la forza, che vela produce, ed inversamente come la massa, ch' ei contiene. Quì poi si è mostrato, che la velocità angolare di un sistema di corpi uniti, debba esser nella ragion diretta de' momenti delle forze quivi applicate, e nell' inversa della somma de' prodotti di ciascun corpicciuolo nel quadrato della di lui distanza dall' asse di rotazione. Dunque questa somma si è convenevolmente denominata *Momento d' inerzia*, affinchè la misura della velocità progressiva, e quella dell' angolare avessero un certo accordo nella forma di esprimersi, e nel modo di praticarsi.

ratur axis, qui in statu translato etiam nunc eamdem servat directionem; tum vero quæretur angulus, quo corpus interea circa hunc axem fuerit conversum. Hocque modo ad quodvis tempus situs corporis perfecte cognoscetur; ita ut tota investigatio ad determinationem illius axis pro quovis tempore cum angulo conversionis reducatur. &c.

PROP. XVI. TEOR.

§. 141. *Il Momento d' inerzia di una verga parallepipeda rettangola, ch' essendo rigida, ed omogenea giri intorno ad un suo asse centrale, e perpendicolare a' piani opposti, uguaglia il peso della stessa verga moltiplicato per un terzo del quadrato della metà della di lei lunghezza.* Fig. 16.

Dim. Il rettangolo CMIH sia una sezione di tal parallelepipedo, che passi per l' asse centrale ON, e stia parallella a' piani opposti. Le rette NO, MC si protraggano indefinitamente verso K, e B: e poi col parametro CO si descriva la Parabola coninica OFB, che abbia il punto O per vertice principale, OK per asse, e stia nel piano COK, onde incontri la MC nel punto B. Dovrà essere CB = CO; imperocchè (*a*) CO^2 è uguale a CB.CO, e quindi CB uguale a CO. Pe' due punti R, ed r della CO, che sieno vicinissimi tra loro, si tirino le sezioni RV, rv perpendicolari al piano CONM, e ciascuna di esse si chiami S, e la densità della verga sia D. Onde dovrà essere S. Rr il volume del picciol prisma di RrvV, ed S.D.Rr la massa dello stesso prisma (*b*): e sarà finalmente $S.D.Rr.RO^2$ il momento d' inerzia, ch' ei tiene volgendosi intorno ad ON (136). Ma, condotte pe' punti R, ed r le ordinate RF, rf, nella Parabola COB, RO^2 uguaglia RF.CO (*c*). Dunque il momento d' inerzia del picciol prisma di RrvV sarà S.D.Rr.RF.CO, cioè uguale ad S.CO. D. RrfF. E quindi il momento d' inerzia della verga prismatica CMNO, che volgesi intorno ad NO, sarà uguale ad S. CO. D. CBFO. Ma è poi S. CO. D il peso della verga CMNO, e lo spazio CBFO è uguale (*d*) ad $\frac{2}{3}$ CB.CO, cioè, da quel che si è dimostrato, ad $\frac{2}{3}$ CO^2.

Dun-

(a) Prop. 8. Lib. 1. Con. Giannatt.
(b) La massa, o il peso di un corpo, valutasi dalla densità di esso nel volume.
(c) Prop. 8. Lib. 1. Con. Gian.
(d) Prop. 23. dello stes. Lib. de' Conici.

Dunque il momento d' inerzia del solido di CMNO, che giri intorno ad ON, sarà quanto il di lui peso moltiplicato per un terzo del quadrato di CO. Or può dimostrarsi nello stesso modo, che il momento d' inerzia di NOHI, altra metà della proposta verga, simile alla prima NOCM, e similmente rivolta intorno ad NO, sia uguale al peso di NOHI moltiplicato per $\frac{1}{3}$ HO^2. Dunque sarà l' intero momento d' inerzia della verga CHIM rivolta intorno ad ON, uguale al peso della stessa verga moltiplicato per $\frac{1}{3}$ CO^2. C.B.D.

§. 142. Cor. I. Laonde chiamando M l' intero peso della Leva prismatica CMIH di uguali braccia, ed R la lunghezza di ciascuno di questi; sarà il di lei momento d' inerzia uguale ad M. $\frac{1}{3}$ RR: cioè *uguale al peso dell' intera Leva moltiplicato per un terzo del quadrato di un braccio*.

§. 143. Cor. II. Che se all' estremo H del braccio HINO penda il peso P, ed ovunque all' altro braccio CMNO stiavi applicato il peso Q, e sia RO uguale ad r; il momento d' inerzia di questa Leva caricata de' pesi P, e Q sarà uguale ad $\frac{1}{3}$ RRM + RRP + rrQ, cioè uguale ad RR. ($\frac{1}{3}$M + P) + rrQ.

 PROP.

PROP. XVII. TEOR.

§. 144. *Il Momento d' inerzia di un cilindro retto, rigido, ed ugualmente denso, che si aggiri intorno al proprio asse, è uguale al di lui peso moltiplicato per un mezzo del quadrato del raggio della base.*

Fig.16.

DIM. Sia C M N O quel rettangolo, che volgendosi con perfetta rivoluzione intorno ad N O generi il proposto cilindro, ed i suoi lati M C, N O si protraggano verso B, e K. Coll' asse K O, col vertice O, e col parametro O C intendasi descritta nel piano O C B la Parabola cubica O F B, cioè tale, che il cubo di una sua qualunque semiordinata G F pareggi quel solido, che abbia CO^2 per base, e l'ascissa G O per altezza. Sarà manifesto, che tal curva debba troncare dalla M C B la parte C B uguale a C O: imperocchè dovendo essere BK^3 uguale a CO^2 in O K, cioè CO^3 uguale a CO^2 in C B, sarà C B quanto C O.

Dal punto F si meni F U parallela a G N, e per lo punto f della stessa Parabola, il quale sia vicinissimo ad F, si tiri anche u f parallela a G N. E poichè il cerchio del raggio O R sta al quadrato di O R in una costante ragione, che si esprima per quella di m ad n: ed in questa ragione è pure il cerchio del

raggio r O al quadrato di r O; sarà (*a*) la differenza de' cerchi de' raggi O R, ed r O ad $OR^2 - Or^2$, come m ad n: cioè l'armilla circolare generata da R r colla descritta rivoluzione starà (*b*) al rettangolo 2 O R r, come m ad n: ond' essa armilla sarà $2\,ORr.\frac{m}{n}$: e l'anello cilindrico descrittovi dal rettangoletto R r v V sarà $2\,ORr.RV.\frac{m}{n}$.

Si chiami D la densità del proposto cilindro; sarà il peso del mentovato anello cilindrico (*c*) uguale a $2\,ORr.RV.D.\frac{m}{n}$: e'l momento d'inerzia dello stesso anello (136) sarà $2\,ORr.RV.D.OR^2.\frac{m}{n} = 2\,Rr.OR^3.RV.D.\frac{m}{n}. = 2\,Rr.FR.CO^2.RV.D.\frac{m}{n}$, ponendo in luogo di OR^3 il prodotto di F R in CO^2, che dalla natura di questa Parabola gli è uguale. Ma $2\,Rr.FR$ non è che il doppio dell' elemento parabolico F f r R: ed è poi $CO^2.RV.D.\frac{m}{n}$ il peso, o la massa del proposto cilindro (*d*), la quale si chiami M. Dunque il

F 2

(a) Prop. 19. El. V.
(b) Prop. 5. El. II.
(c) Imperocchè il peso di un corpo è il prodotto del di lui volume nella densità.
(d) Per questa stessa ragione.

inerzia di Q uguale a Qrr, e quello di P uguale a PRR (136). Inoltre i momenti della Potenza, e della Resistenza sono respettivamente pR, e qr (81): onde sarebbe $pR - qr$ il momento di quella forza, ch' effettivamente volgerebbe questa Macchina, s'ella non avesse attrito. Per la qual cosa chiamando ϕ quel peso, che pendendo dal cilindro equivale alla frizion della Macchina, e ϕr il suo momento; sarà $pR - qr - \phi r$ il momento di quella forza, ch' effettivamente volge l'asse nella ruota. E quindi la velocità angolare (137) di questa Macchina sarà $(pR - qr - \phi r) : (\frac{1}{2} Mrr + Qrr + PRR)$, e chiamando V la velocità assoluta del punto L, o della Resistenza Q, sarà (126)

$$V = \frac{r\,(pR - qr - \phi r)}{\frac{1}{2} Mrr + Qrr + PRR}$$

§. 146. Cor. I. Il valore di questa frazione si accresce, secondochè restando invariato il numeratore si minori il dilei denominatore. E questo ne addiviene minorando M, o — Q, o P, o tutte insieme, o due di tali grandezze. Dunque, *ritenendo le stesse dimensioni di un' Asse nella Ruota, e la stessa energìa della Potenza, e della Resistenza avrassi una maggiore velocità nella Resistenza, secondochè meno pesi il cilindro, o abbia meno inerzia la Potenza, o la Resistenza.*

§. 147. Cor. II. I fattori, che veggonsi nel Numeratore della stessa frazione, non son che r, e $pR - qr - \phi r$: dunque il dilei valore si farà zero, quando pongasi $r = 0$, o pure $pR - qr - \phi r = 0$, cioè $pR = r(q + \phi)$. Vale a dire *la velocità del peso P dovrà svanire in due casi, o quando sia zero il raggio del cilindro, onde traesi quel peso: o quando il raggio di esso cilindro stia a quello della Ruota, come l' energìa della Potenza all' aggregato della Resistenza, e della frizione della Macchina.* Le quali cose dal solo equilibrio di tal Macchina avrebbonsi potuto altresì rilevare.

§. 148. Cor. III. Tra questi due casi contengonsi tutti quegli altri, ne' quali verrà il Peso promosso dalla Potenza, ora con una velocità, ora con un'altra. E tra essi vi sarà anche quello, in ch' ei dalla Potenza colla massima prestezza n'è tirato, o sollevato.

§. 149. Cor. IV. E quindi se diasi la massa, e 'l momento d' inerzia di tal Macchina, potrà col metodo de' Massimi, e de' Minimi definirsi il semidiametro del cilindro, talchè un dato Peso siane colla massima velocità promosso da una data Potenza.

§. 150. Scol. I. La soluzione di questo Problema può effettuarsi anche da' Candidati del riferito Metodo: ond'io tralasciandola v'arreco solamente quella di un Problema affine, che sembrami assai vantaggioso per l'uso di una tal Macchina. Intanto tutte queste speculazioni, ed altre simiglianti si posson fare anche riguardo alle Leve, che muovon de' Pesi: e m'immagino che da ciò Voi ritrarrete quanto sia insufficiente quel Principio Galileano, che in ogni Macchina il risparmio della forza sia col dispendio del tempo, e che il risparmio del tempo esiga maggior consumo di forza: sicchè l'un risparmio sia in ragion inversa dell'altro. Ma di questo vi ragionerò quaggiù ampiamente.

PROP. XIX. PROBL.

Fig.21. n. 2.

§. 151. *Rappresenti* C L O B A *l'Asse nella Ruota, si vuol determinare la lunghezza del raggio* O A *della Ruota, affinchè la Resistenza* Q *possa trarsi colla massima velocità dalla Potenza* P.

Soluz. Ritengansi gli stessi simboli del Probl. prec. e si ponga solamente x in luogo di R: onde la velocità della Resistenza Q dovrà esserne uguale ad $r(px - qr - \phi r) : (\frac{1}{2}Mrr + Qrr + Pxx)$. E facendo per brevità

vità del calcolo $q + \phi = n$, ed $\frac{1}{2}M + Q = N$, sarà

$$V = \frac{rpx - nrr}{Nrr + Pxx} \quad (a)$$

Ma nel caso, che la grandezza V è un Mas-

(a) I.° La grandezza $(rpx - rrn) : (Pxx + Nrr)$ può avere la seguente forma $\frac{rp}{P}\left(x - \frac{nr}{p}\right) : \left(xx + \frac{Nrr}{P}\right)$, o quest'altra $c(x - f) : (xx + gg)$, ove siasi posto $c = rp : P$, $f = nr : p$, $gg = Nrr : P$. Onde questo Problema può sinteticamente risolversi nel seguente modo, che in simili casi vid'io praticarsi da un dotto Amico.

I.° Si descriva la Parabola conica L N P, che abbia L S per asse, L per vertice, e per parametro principale la V L uguale a c. 2.° L'asse G L distendasi su del di lei vertice, sicchè L A sia uguale a $gg : c$, ed in A poi si eriga la A E perpendicolare ad A L ed uguale ad f. 3.° Finalmente dal punto E si meni alla Parabola L N P la tangente E P, e dal punto P del contatto si ordini all'asse la P S; *sarà questa retta il cercato valore della variabile* x. Fig.17.

Imp. Ponendo $AB = x$, e $BN = y$; sarà $EB = x - f$, ed $ON = LG = y - gg : c$. Ma per la natura di questa curva è $GN^2 = GL \cdot LV$: dunque sarà $xx = cy - gg$, e quindi $xx + gg = cy$. Dunque V, ch'è uguale $c(x - f) : (xx + gg)$, sarà $(x - f) : y$, cioè uguale ad $EB : BN$. E quindi la grandezza V diverrà un Massimo, quando il rapporto dell'ascissa E B alla sua ordinata B N diverrà tale. Ma questo massimo rapporto è nel punto P del contatto: imperciocchè sta $EQ : QP :: EB : BC$, ed è sempre E B a B C in maggior ragione di E B a B N (8. El. V). Dunque il rappor-

Massimo, dV è zero: dunque sarà ancora

$$D.\frac{rpx - rrn}{Nrr + Pxx} = 0 \quad \text{, cioè}$$

$$rpdx(Nrr+Pxx) - 2Pxdx(rpx-rrn) = 0$$

E dividendo per dx questa equazione, ed ordinandola secondo le potenze della grandezza x, avrassi

xx

porto di EQ a QP sarà altresì maggiore di quello, che ha una qualunque ascissa EB alla sua ordinata BN; ond'ei sarà il Massimo. E'l raggio della Ruota, ch'erasi espresso per x, sarà, nel caso della più celere promozion del Peso, uguale ad AQ.

2. Cor. I. Per ottenersi in questa Macchina la promozione del peso Q colla forza P, convien che il raggio della Ruota sia maggiore di AE: e per la massima promozione del peso dee essere tal raggio quanto AQ.

3. Cor. II. Sia la retta AD media tra le AB, ed AQ, e da D si conduca alla Parabola l'ordinata DF. Sarà la ragione di ED a DH uguale a quella di EB a BC: e sarà, come ne pare, la ragione di DH a DF maggiore di quell'altra di BC a BN. Dunque la Composta della prima, e della terza di queste quattro ragioni sarà maggiore della Composta della seconda, e della quarta: vale a dire (Prenoz. I. Mecc.) sarà ED a DF in maggior ragione di EB a BN.

4. Cor. III. Dunque *la Promozion del Peso, che si fa con tal Macchina animata da una stessa Potenza, sarà tanto più celere, quanto il raggio della Ruota facciasi più lungo, senza eccederne in lunghezza la* AQ.

5. Cor. IV. Se il raggio della Ruota sia quanto AB; la promozion del Peso sarà proporzionale ad EB : BN.

$$xx - \frac{2nrx}{p} = \frac{Nrr}{P}$$

Ed
$$x = \frac{rn}{p} + r\sqrt{\left(\frac{N}{P} + \frac{nn}{pp}\right)}$$

Laonde restituendo i valori delle grandezze n, ed N, si otterrà

$$x = \frac{rq + r\phi}{p} + r\sqrt{\left(\frac{M+2Q}{2P} + \left(\frac{q+\phi}{p}\right)^2\right)}$$

§. 152. Cor. I. Il raggio della Ruota sarà tanto più corto, quanto in parità di altre circostanze n'è di maggior valore la grandezza p, o l'altra P: cioè quanto la Potenza movente sia più intensa, o abbia più d'inerzia.

§. 153. Cor. II. Supponghasi, che P sia zero; sarà $\frac{M+2Q}{2P} = \frac{M+2Q}{0} = \infty$: e quindi anche x sarà infinito. Dunque, *se la Potenza movente non abbia inerzia; il raggio della Ruota dovrà essere infinitamente lungo, affinchè essa Potenza promuovane il peso colla massima velocità.*

§. 154. Cor. III. E per un tal vantaggio *debbonsi in un Mulino a vento le ali più lunghe alle più corte preferire: ancorchè sì queste, che quelle abbiano una stessa superficie, ed una stessa percossa ricevan dal vento.*

§. 155.

§. 155. Scol. I. La grandezza $r(pR - qr - \varphi r):(\frac{1}{2}Mrr + Qrr + PRR)$, onde quì sopra ho espressa la velocità assoluta del peso, che traesi coll'Asse nella Ruota, in realtà non è che un di lei elemento, proporzionale a quella forza acceleratrice, che vel produce. Pur non di meno non ho deviato dal mio proposito, instituendo il calcolo su questa espressione: imperciocchè la massima velocità del peso non può prodursi, che dalla massima forza, che lo accelera: e le dimensioni, che ha la Macchina per ottener questa, dovrà averle per quella.

§. 156. Scol. II. Il sommo Eulero, cui piacque specular l'uso più lucroso delle Macchine sì semplici, che composte, si occupò in una ben lunga Dissertazione (*a*) a risolvere alquanti Problemi su questo argomento: l'ultimo de' quali, che sembrami più arduo di quelli, che il precedono, propone a „ formare un sistema di Ruote dentate, e „ di rocchetti, talchè un dato peso colla „ massima velocità siane sollevato da una „ Potenza data „. I principj, donde il Valentuomo ne distese l'analitica soluzione, son que' medesimi, che ho quì sopra adoperati. Ma oltre a questi avvene un'altro tutto nuovo, e degno di grandissima considerazione, ed è che *il momento di una Ruota*, *che aggirandosi ne muove un' altra*, *debba essere in parità di altre circostanze*, *come il quadrato della di lei velocità angolare*. Intanto dal terzo Corollario, e dallo Scolio dello stesso Problema ei ne rileva, I°, *che quanto meno Ruote si combinino in tal Macchina*, *tanto più velocemente si promuova un peso*, *da una data Potenza animato*. II°. *E che*, *se le circostanze di essa Macchina non permettano di diminuirne il numero delle Ruote*, *debba farsi la prima Ruota ben grande riguardo al suo rocchetto*, *e che negli altri assi sien quasi uguali i raggi delle respettive Ruote*, *e de' rocchetti*.

(a) *Comm. Accad. Pietr. Vol.* X.

PROP. XX. TEOR.

§. 157. *E' falsa quella Massima comunemente da' Meccanici adottata*, *che ogni Macchina debbasi porre in moto*, *sol che vi si accresca un poco la Potenza*, *la quale colla Resistenza si equilibrava*.

Dim. Questo principio sarebbe vero, se in pratica si potesse formare qualche Macchina di materia non inerte: e si potessero altresì rendere tanto pulite, e lisce quelle sue parti, che si stropicciano, sicchè vi si tolga qualunque attrito, e non vi emerga tra esse sensibile attrazione. Ed essendovi delle corde, de, cui sieno legati i pesi da trarsi; si converrebbe, che anche queste avessero una perfetta cedevolezza, onde non esigasi un soprappiù di forza nella Potenza per vincerne la rigidezza loro. Ma tali condizioni possono ritrovarsi nelle sole Macchine ideali, e non già nelle reali: in ciascuna delle quali deesi accrescer di molto la Potenza, affinchè il suo momento non solo superi quello della Resistenza; ma altresì vinca le frizioni, le rigidezze delle funi, ed anche i momenti d' inerzia di que' corpi, che al muoversi della Macchina vi si aggirano (136). Dunque non è vero, che una Macchina debbasi porre in moto, tosto che si accresca anche d' un' infinitesimo la Potenza, che colla Resistenza si equilibrava C. B. D.

PROP. XXI. TEOR.

§. 158. *Le Regole dell' Equilibrio di una Macchina son ben diverse da quelle del di lei moto.*

Dim. L' equilibrio in una Macchina, siasi semplice o pur composta, nasce dall' equalità de' momenti della Potenza, e della Resistenza, che quivi agiscono: laddove il moto di essa Macchina vien dalla *prepollenza* del momento della Potenza su quello della Resistenza, sulle frizioni de' corpi, che si stropicciano, sulla rigidezza delle funi, che le appartengono, e su i momenti d' inerzia di que' corpi, che al muoversi della Macchina vi si aggirano (136). E poichè queste forze renitenti alla Potenza sono fra se diverse non pur nell' origine loro; ma nell' intensità, nel modo onde vi agiscono, e nel metodo di misurarle; chi potrà mai confondere le regole dell' equilibrio di una Macchina con quelle del di lei moto, o dalle prime trarne le seconde? C. B. D.

PROP. XXII. TEOR.

§. 159. *E' insufficiente quel Principio adottato da' Meccanici, che quanto più forza si risparmj nel produrre un dato effetto con una Macchina, tanto più tempo vi si richiegga a produrlo. E che vicendevolmente il risparmio del tempo siavi col dispendio della forza: sicchè non vi si possano que' due risparmj proccurare insieme.*

Dim. Il Gran Galilei nel suo trattato della Scienza Meccanica s' impegnò di dimostrare questa Massima con profonde, e leggiadre speculazioni, le quali non furono attentamente esaminate da coloro, che adottaronla, nè confutate dall' Eulero, cui riuscì calcolando rilevarne la di lei insufficienza. Dunque è di di bene, ch'io quì vi esibisca il prospetto di tali ragioni, e ve ne additi que'nei, che sfuggon l'acume di chi le contempla lievemente.

Immaginatevi (ecco l'esemplo su cui ragiona il Valentuomo) che una Potenza applicata all'Asse nella Ruota sollevi un peso decuplo della sua forza: onde debba esserne il semidiametro della Ruota decuplo del semidiametro dell'Asse (84), e la circonferenza di quella altresì decupla della circonferenza di questo. Sarà chiaro, che, quando la Potenza si sarà mossa una volta per la circonferenza della Ruota, l'asse, cui s'avvolge la corda traente il peso, avrà fatta una sola rivoluzione: e'l peso avrà percorso la decima parte di quel, che avrà camminato la Potenza. Dunque tal Potenza, dovendo condurre per un dato spazio la Resistenza decupla della sua forza, è obbligata a trascorrerlo dieci volte: e quindi dividendo quel peso in dieci parti, ciascuna delle quali sia quanto la Potenza, questa potrà trasportarle una per volta. Con che il vantaggio, che traesi da questa Macchina, o da altre, è di condurre tutto il peso unito, ma non con manca fatiga, o con maggior prestezza, o per maggior intervallo di quello, che la medesima forza potesse fare conducendolo a parte a parte.

Ma permettetemi, che vel dica, non son che

che falsi que' due principj, su i quali poggia l'intero discorso del Galilei, cioè I° *che un peso decuplo di una data Potenza possa da questa esser tirato con un Mangano, ove il semidiametro della ruota sia decuplo del semidiametro del cilindro*. II° *e che tal Potenza investendo una decima parte di quel Peso valga a condurla in un dato tempo per tanto spazio, per quanto nello stesso tempo sarebbesi elevato con della Macchina l'intero Peso*. Onde il divisato ragionamento, benchè chiaro, e venusto, non è saldo quanto ne pare. Ed in vero, riguardo al primo de' due Principj, chi di Voi è sì smemorato, che dalle anteriori Teorìe (84) non raccolga doversi in tal Macchina quel peso colla Potenza equilibrare, e non esserne mica sollevato? E chi non vi avverte che di molto converrebbe accrescerne il momento della Potenza, affinchè questa vincendo la renitenza del peso, la frizione della Macchina, ed i momenti d'inerzia de' corpi, che vi si aggirano, potesse poi trarne il mentovato peso (157)? Ma, riguardo al secondo principio, mi sembra da ogni verità Meccanica alieno quel che vi si propone: *che tal Potenza investendo la decima parte del peso possa muoverla con tanta velocità, con quanta l'intero Peso si sollevava dal Mangano, dalla stessa Potenza animato*. Vale a dire supponendo, che la Potenza sia un Peso di 10

 lib-

libbre, e di 100 la Resistenza, (di cui ogni decima parte n'è anche di 10 lib.), dovrà dirsi, che un peso di 10 lib. investendone un'altro a se uguale il possa spignere compartendogli una velocità data. E come ciò ne addiviene? e per qual parte deesi muovere ciascun de' Pesi? Dunque è falso non solo quel Principio, col quale il Galilei apre il suo ragionamento, che quell'altro, ond'ei lo chiude.

Ma la fallace pruova di un Teorema nulla decide sulla verità, o falsità di esso. Dunque fia meglio, ch'io tralasciando cotesto esame, mi rivolga a dimostrarvi direttamente il mio assunto. Per la qual cosa suppongasi (per ragionarvi sulla stessa Macchina), che il raggio della Ruota sia alquanto maggiore del decuplo raggio del cilindro, cioè che abbia una tal lunghezza, che la mentovata Potenza applicata ad angoli retti al di lui estremo possa prevalere al momento del Peso, che vi si trae, alla frizion della Macchina, ed a' momenti d'inerzia della Macchina, e de' corpi, che vi si aggirano. Laonde si chiami a cotesto raggio della Ruota, ed A sia quello, ch'essa dovrebbe avere (151) per l'uso più lucroso, (cioè per poterne promuovere il Peso per un dato spazio S nel minimo tempo, che si dica t): e si supponga essere a minore di A. Sarà chiaro, che

che dalla prevalente energìa della Potenza debbasi nella Macchina generare una certa velocità angolare (*a*): e che il peso abbiasi a trarre per lo spazio S in un certo tempo, che si dica T, il quale sarà maggiore di t. Si supponga di bel nuovo, che il raggio della Ruota sia uguale ad a': la qual grandezza sia altresì minore di A, ma maggiore di a. Dovrà eccitarsi nella Macchina una velocità angolare maggiore di quella, ch'essa Macchina dianzi aveva: e 'l Peso dovrà condursi per lo spazio S in un tempo minore di T, e maggiore di t. E così successivamente ragionando verrà a concludersi, che a' raggi della Ruota, delle respettive lunghezze a, a', a'' . . . . . A, debbanvi corrispondere (*b*) i tempi della promozion del peso, respet-

(a) Vedete la nota (a) n. 4. del §. 151.

(b) Eulero *nel princ. della Dissert. sull. Macch. inser. nel Vol. III. de' Nuov. Comm. di Piet.* così scrive. Se un peso di 1000. libbre vogliasi trarre con un' Asse nella Ruota da una forza di 100. libbre; ognuno sa, che per l'equilibrio debba essere il raggio della Ruota decuplo di quello del cilindro, e che per lo moto convenga fare quel raggio maggiore del decuplo di questo. Ma si dee altresì sapere, che, se il raggio del cilindro sia della lunghezza 1, e quello della Ruota vadasi facendo successivamente di 12, 13, 14, &c., la velocità del moto dovrà crescere successivamente: ed ella dovrà decrescere, quando il raggio della Ruota facciasi di 100, 110, 120, &c. Dunque la velocità della promozion del peso c[illegible] o grado, e poi decresce.

spettivamente uguali a T, T', T'' . . . . . t: e che quella serie sia crescente, e questa decrescente. Or, premesse tali cose, sia vero ciocchè volgarmente si dice, che quanto si guadagni di forza per mezzo di una Macchina, altrettanto si scapiti nel tempo, e che il risparmio del tempo esiga una potenza più poderosa. Dunque ci vorrebbero disuguali Potenze per esempio p, p', p'' . . . . P per poter trarre lo stesso peso all' altezza S negl' ineguali tempi T, T', T'' . . . . . t: ed esse Potenze dovrebbero essere nell' inversa ragione di questi tempi, o almeno dovrebbero successivamente crescere, come van decrescendo i tempi T, T', T'' . . . . . t. Ma quì la Potenza, che in tutti questi casi anima la Macchina, non è che la stessa: dunque è falsa la proposta massima.

CAP. VII.

REGOLE DA TENERSI NELLA COSTRUZIONE DELLE MACCHINE, E NELL' ESAMINARLE.

§. 160. REG. I. *Quando con diverse Macchine può ottenersi uno stesso fine, giova sceglier quella, ch' è d' uso più lucroso: cioè che nel minimo tempo promuova per un dato spazio una data Resistenza, adoperandovisi una Potenza data.*

Leggete quanto ho scritto nel cap. precedente, e massime nel §. 151.

§. 161. REG. II. *Qualor si tema, che una Macchina semplice possa frangersi, o incurvarsi da un gran Peso, che vi si tragga, o da una poderosa Potenza, che vi si adatti; sarà necessario avvalersi di una Macchina Composta: regolandone le sue dimensioni co' dati rapporti della Potenza, e della Resistenza, e calcolandone bene le frizioni, che sogliono moltiplicarvisi, ed i momenti di essa Macchina, e de' corpi che vi si muovono.*

Questa Regola è diretta a farvi ricredere di ciò, che forse avrete appreso da' Geometri puramente speculativi, che *basti levissima forza a sollevare un gran peso, sol che* *vi si adoperi una Leva eterodroma, le braccia della quale sieno reciproche a quella forza, ed a quel Peso, perpendicolarmente applicati a' di lei estremi.* Che *colle sole Macchine semplici possiamo vantaggiarci ogni uso, che ne piaccia.* Che &c. Le quali Massime sarebber vere, se in Natura si dessero de' corpi perfettamente rigidi, e d' inerzia privi. Ma qual corpo v' ha sì duro, ed inflessibile, che ad una gagliarda pressione o non si franga, o non si fletta in verun modo? e qual n' è mai quell' altro, cui l' inerzia della sua massa nol faccia restio al moto? Dunque temendosi, che una Macchina semplice possa rompersi, o piegarsi all' azion delle forze applicatevi, dovremo in vece di essa adottarne una Composta. Or in una Macchina Composta, massime s' ella sia molto intrigata, v' emergono delle molte, e varie resistenze, pe' diversi stropicciamenti che vi si fanno, per le diverse rigidezze e tensioni delle corde che talor vi sono, e per le inuguali velocità angolari de' di lei pezzi (*a*). Dunque convien determinar bene siffatte resistenze, per valutarne il di lei effetto: lo che esige un profondo Meccanico, ed un valente Analista.

§. 162. Reg. III. *Una Potenza, che agisca per pressione su di una Macchina, ritiene sempre la stessa forza impellente, o che la Macchina sia in quiete, o ch' ella muovasi velocemente, come ne piaccia. Ed al contrario una Potenza, che operi con replicate spinte su di una Macchina, al muoversi di questa si scema di energia.*

(a) Leggete il Cap. VI.

Quando la Potenza di una Macchina sia un peso, o l' elaterio di un corpo; la sua energia riman sempre la stessa, qualunque siane la velocità, ond' essa Macchina si aggiri. E se tal Potenza sia l' urto dell' acqua profluente, la percossa dell' aria, o altra consimil forza; la sua energia dee decrescer a misura, che la velocità della Macchina si accresce, e può anche addivenire, ch' ella svanisca interamente. Per intender come ciò nasca, immaginatevi di voler incontrare colla vostra mano un sasso, che venga scendendo da alto, e che all' arrivarne sulla vostra mano, voi l' abbassiate con pari velocità, o con velocità minore di esso. Sarà manifesto, che nel primo caso il sasso non farà colpo, riducendosi la sua azione ad un semplice toccar senza offendervi: e che nel secondo l' impressione, che ne riceverete, sarà come la differenza della velocità del sasso, e di quella della mano. In simil guisa l' acqua di un fiume, che percuote le palmette di una ruota quiescente, la volge coll' intero empito del suo corso: ma all' aggirarsi della ruota esse vi ricevono meno ur-

 to,

to, sfuggendo l'acqua profluente. Ed un vento, che spiri sulle volubili ale di un Mulino, vi fa tanto men colpo, quanto più celeri queste vi si volgono.

§. 163. Defin. XXXII. In una Macchina il *Momento d'impulsione* è il prodotto della forza impellente nello spazio, ch'ella descrive in un secondo: ovvero è il prodotto di essa forza impellente nella velocità, con cui vi si muove (8. Mecc.).

§. 164. Scol. Questo Momento d'Impulsione fu detto da Daniele Bernulli *Potentia Absoluta*, e dall'Eulero *Momentum Impulsus*.

§. 165. Defin. XXXIII. Il *Momento di effetto* di una Macchina è il prodotto della forza della Resistenza nello spazio, che questa descrive in un secondo.

§. 166. Scol. Immaginatevi, che una Macchina sollevi in ogni secondo all'altezza a il peso P; si dirà a P il momento di effetto di essa Macchina.

§. 167. Reg. IV. *Il più gran momento d'impulsione, che può ottenersi con una Macchina animata dall'acqua profluente, è quando la celerità di quella parte della Macchina, che ne riceve l'urto, sia un terzo della velocità dell'acqua* (*a*).

Si

(a) Quì si prescinde da ogni variazione, che può ad-

Si chiami c la velocità, onde l'acqua imbatte perpendicolarmente su di una parte della Macchina: a^2 sia la superficie di questa parte, che riceve l'urto: ed u la velocità di a^2, che muovasi per lo stesso verso del fluido. Sarà l'impressione fatta dall'acqua sulla superficie a^2 quanto quella, che le si farebbe, se restando la Macchina in quiete, l'acqua ne percuotesse la stessa superficie a^2 non già colla velocità c, ma coll'altra $c - u$, e benanche ad angoli retti: la qual cosa è di per se chiara. E poichè, come da sicure sperienze si rileva, l'impressione, che fa un fluido percuotendo perpendicolarmente una data superficie piana, è come la magnitudine di questa, e come il quadrato della velocità di quello; sarà l'energìa della percossa, che vi fa l'acqua profluente sulla superficie a^2, uguale ad $aa(c - u)^2$: e'l Momento d'impulsione (163) sarà $aau(c - u)^2 = aa(ccu - 2cuu + u^3)$. La qual grandezza si ponga uguale ad y. Or dovendo quest'espressione divenire un Massimo, sarà per le leggi del *Metodo de' Massimi, e de' Minimi*

a a

addivenirne, o dalla diversa energìa de' filamenti del fluido percuzienti il solido, o dalle diverse distanze, che hanno dall'asse di girazione i diversi punti del solido percossi dal fluido.

$$aadu(cc - 4cu + 3uu) = dy = 0 \quad A$$

E quindi $cc - 4cu + 3uu = 0$,

E risolvendo questa Equazione quadratica, sarà

$$u = \tfrac{1}{3}c$$

E poichè differenziando l'Equazione A ottiensi $aadu^2(6u - 4c) = ddy$, cioè $aa(6u - 4c) = ddy : du^2$; sarà (sostituendo per u il suo valore $\tfrac{1}{3}c$)

$$aa(2c - 4c) = -2aac = ddy : du^2$$

E' dunque negativo il valore di $ddy : du^2$: e quindi per le regole del divisato Metodo dee essere u uguale ad un terzo di c, quando vogliasi, che sia un Massimo il Momento d'impulsione $aa(ccu - 2cuu + u^3)$.

§. 168. Cor. I. Dall'Analisi quassù recata si debbono raccorre più cose degne della vostra attenzione. Ed in primo luogo se u sia uguale a c, il momento d'Impulsione, ch'è espresso dalla formola $aau(c - u)^2$, diverrà $aau(c - c)^2 = 0$. Cioè a dire *l'acqua profluente non farà alcuna impressione sulle palmette di una Ruota, ch'ella ne aggiri, quando la velocità delle palmette, e quella dell'acqua si pareggino*. Lo stesso convien dire del vento che spiri sulle ale di un Mulino (*a*).

(a) Queste verità, ch'io ritrassi dall'Eulero, furono anteriormente conosciute dal Sig. de la Hire, e poi dal nostro Valentissimo Idraulico Bernardino Zendrino *Raccol. degli Aut. del Moto dell' Acqua Edizione II. Vol. 8.*: il quale conclude acconciamente, che non potendosi le palmette di una ruota velocitar tanto, quanto l'acqua destinata a muoverle, altrimenti l'impressione di questo fluido nulla opererebbe contro alle palmette, che si sottrarrebbero all'urto; ne abbisogni che pe'l massimo effetto d'impressione la velocità della ruota sia un terzo della velocità dell'acqua.

§. 169. Cor. II. L'impressione, che fa l'acqua sul piano quiescente a^2, percuotendolo ad angoli retti colla velocità $c - u$, è quanto $aa(c - u)^2$. Dunque facendo u uguale ad $\tfrac{1}{3}c$, sarà tal impressione uguale a $\tfrac{4}{9}aacc$.

§. 170. Cor. III. E perchè $aa(c - u)^2$ è uguale ad $aacc\left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$: ed è poi $aacc$ l'impressione, che fa sul piano a^2 l'acqua, che il percuote colla velocità c, la quale impressione si è trovata per esperienza uguale ad un certo peso, che si dica P; sarà $aa(c - u)^2 = P\left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$. Vale a dire *l'acqua, che fluendo colla velocità c percuote perpendicolarmente la palmetta di una Ruota, la quale fugga colla velocità* u, *può aversi come un peso uguale a* $P\left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$.

§. 171. Reg. V. *Il massimo momento d'impulsione, che può ottenersi con una Macchina animata dalla forza di un'uomo, è quando la velocità di tal Potenza è un terzo di quella, onde muovendosi quest'uomo soffrirebbe il total dispendio della sua forza.*

L'origine delle forze animali, ed il loro diffondersi pe'muscoli, è di un'investigazione assai malagevole: pur non di meno il grand'Eulero ha saputo calcolarne l'energìe, ed i momenti loro, servendogli di norma ciò, che si è nel §. 167. dichiarato. A tal uopo sia P la massima forza, che può fare un'uomo stando in quiete: e tal forza da esso perdasi interamente, quando corra colla velocità c, cioè facendo lo spazio c in un secondo. Sia inoltre u la velocità, ond'ei si muova agitando una Macchina, e sia u minore di c; sarà l'energìa della forza, con cui quest'uomo muove la Macchina, uguale a $P\left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$, e'l momento (163) d'impulsione sarà $Pu\left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$. E poichè per lo Metodo de'Massimi, e de'Minimi la variabile u dee essere $\frac{1}{3}c$, quando $Pu\left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$ diviene un Massimo. Dunque sarà vero quanto ho quì proposto.

La forza di un'uomo quiescente sia di 60 lib., e sia di 6. pied. la massima velocità, ch'ei può avere: cioè sia $P = 60$ lib., e $c = 6$. pied.; sarà nel caso della massima azione $u = 2$. pied. E quindi l'energìa della sua forza, ch'esprimesi generalmente per $P\left(1 - \frac{u}{c}\right)^2$, sarà $60 . \frac{4}{9} = 26\frac{2}{3}$ libbre, che a un di presso fanno 13. rotola napol.

E supponendo essere la forza di un cavallo settupla di quella di un'uomo, sicchè P sia di 420 lib., ed esser $c = 12$. pied.; sarà nel caso della massima azione, ch'ei può fare in una Macchina, $P\left(1 - \frac{u}{c}\right)^2 = \frac{4}{9} . 420$ lib. $= 186\frac{2}{3}$ lib., cioè di 90. rot. nap. (*a*).

§. 172. Reg. VI. *Il più vantaggioso sito, che può avere l'Ala di un Mulino a vento rispetto al di lei asse, è quando questo se le inclini sotto l'angolo di 54.° 44.' Intendendosi, ch'ella riceva un mediocre colpo d'aria, in un sol luogo, ed una sola volta: imperciocchè, rendendosi continua ed impetuosa l'azione del vento, ed investendo l'intera Ala, ne abbisognano altre regole per fissare la più vantaggiosa di lei si-*

(a) I Francesi dimostrano, che sette uomini sieno uguali in forza ad un cavallo: e gl'Inglesi li riducono a cinque. Che penseremo dunque, Voi mi direte, in questo divario d'oppinioni? Vi rispondo: se le sperienze d'ambe le parti son vere, ed egualmente robusti i cavalli di queste nazioni, sette Francesi sono uguali in forza a cinque Inglesi: come ho veduto un Facchino Napolitano valer per due di que'di Roma.

situazione rispetto all' asse: le quali sono malagevoli a definirsi, e di dubbio evento.

I. Per darvi qualche idea delle Ale di un Mulino a vento, immaginatevi il rettangolo
Fig. 18. QDEP, i di cui lati opposti QP, DE sieno bisecati dalla GA: ch' ei sia fortemente saldato ad un cilindro, l'asse del quale sia CB perpendicolare a GA, ed inclinato ad AE: e che il rettangolo, e 'l cilindro volgansi tutti e due intorno all' asse CB. Si dirà la *figura* QDEP l' *Ala di un Mulino a vento*.

II. Per le rette GA, AB concepitevi condotto il piano GABF, e che dal punto A erigansi le due rette AN, AM, quella perpendicolare al piano dell' Ala QDEP, questa perpendicolare all' altro piano GABF, le quali dovranno essere amendue perpendicolari alla GA comune sezione di que' due piani. E sarà in I.° luogo l' angolo BAE l' inclinazione de' due piani QDEP, GABF: per esser la GA (a) perpendicolare sì ad AE, che ad AB. II.° Le 4. rette AM, AN, AB, AE dovran trovarsi in uno stesso piano. Imperocchè avendovi dimostrato esser retti gli angoli NAG, MAG, ed essendo anche retti gli angoli BAG, EAG per costruzione; le rette AM, AN, AB, AE (b) dovran giacere in uno

(a) Defin. VI. El. XI.
(b) Prop. 5. El. XI.

uno stesso piano. III.° E quindi, se da un qualunque punto N della retta AN si menino le due rette NM, NR respettivamente parallele ad AC, ed AM; da queste quattro rette, che son tutte in uno stesso piano, verrà a formarsi un parallelogrammo, che sarà anche rettangolo per aver retto l' angolo MAR. IV. Finalmente l' angolo BAE fatto dall' asse dell' Ala, e dal di lei lato inferiore è quanto quello, che contiensi dalle divisate perpendicolari AN, AM. Dalla figura 18 ciò è difficile a rilevarsi: quindi per torvi d' impaccio v' invìo alla fig. 19. n. 2., ove suppongo, che il piano di questa Tavola sia quello dell' angolo BAE, in cui ne stanno insieme le quattro rette AN, AM, AB, AE. Dunque saranno retti, e quindi uguali gli angoli NAE, MAB: e tolto da essi il comune angolo NAB vi resterà l' angolo BAE uguale all' altro MAN.

III. Ciò premesso, diasi dal vento una sola spinta all' Ala QDEP nel punto a per la retta ba parallela all' asse AB: e condotte dallo stesso punto A le tre rette am, an, ae respettivamente parallele ed uguali alle sottoposte AM, AN, AE, si compia il rettangolo marn: che sarà perfettamente uguale, e similmente posto all' altro MARN. E finalmente si chiami F quella spinta, e φ l' angolo eab, o il suo uguale EAB. Sarà F. sen. ϕ l' energìa della percossa, che la medesima Ala ri-

riceve in a (a): vale a dire l'Ala nel luogo a riceve quella stessa impressione dalla forza F per a r, che dalla forza F. sen. ϕ. per an. Per la qual cosa se la retta a n dinoti la forza F. sen. ϕ, che intendasi risoluta nelle due laterali a r, a m; sarà chiaro, che la sola forza a m debba volger l'Ala d'intorno al di lei asse: poichè l'altra a r, diretta a rimuover la stess'Ala dal punto A, o a farle cangiar sito, viene interamente distrutta dall'invincibile forza, onde supponesi l'Ala saldata al cilindro A B. Dunque la forza a n sarà al suo momento nel volger l'Ala, come a n ad a m, cioè come A N ad A M, o come il raggio al coseno dell'angolo M A N, o del suo uguale B A E (b). E quindi ponendo il raggio uguale ad 1, avrassi 1 a cos. ϕ, così F. sen. ϕ al quarto F. sen. ϕ. cos. ϕ: che dovrà esprimere il momento, o l'energìa, che avrà il filamento d'aria a b nell'aggirar l'Ala intorno ad A B. E poichè il numero di simiglianti filamenti d'aria, che cadono sulla retta a e parallela ad A E, è proporzionale al seno dell'angolo t a e, o dell'altro B A E, cioè a sen. ϕ (c); sarà la loro ener-

(a) §. 222. n. III. Mecc.

(b) N. II. di ques. Reg.

(c) Si cali e t perpendicolare ad a b; sarà il numero de' filamenti di aria, che percuotono la a e sotto l'angolo b a e, quanto quelli, che si arresterebbero a percuotere perpendicolarmente la e t. Ma il numero de' filamenti d'aria, che percuoterebbero perpendicolarmente la e a sta al numero di quegli altri filamenti, che ad angoli retti ferirebbero la e t, come e a ad e t, cioè come il raggio al seno di e a t, o di E A B. Dunque il numero de' filamenti, che percuotono la retta e a sotto l'angolo e a t sarà proporzionale al seno di esso, cioè a sen. ϕ.

energìa nel volger l'Ala intorno ad A B, come il momento di ciascheduno, e'l numero di tutti: cioè come F. sen. ϕ. cos. ϕ, e come sen. ϕ, vale a dire come F. sen. ϕ.^{2} cos. ϕ. E quindi, dovendo quest' espressione divenire un Massimo, sarà D. (F. sen. ϕ.^{2} cos. ϕ) $=$ o.

Pongasi a tal uopo cos. $\phi = x$, sarà sen. $\phi^2 = 1 - xx$, ed F. sen. ϕ^2. cos. $\phi = Fx - Fx^3$. E dovendo essere D. ($Fx - Fx^3$) $=$ o, sarà $Fdx - 3Fxxdx =$ o, cioè $1 = 3xx$, ed $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Vale a dire $\phi = 54.^\circ 44'$.

Questo valore dell'angolo del più vantaggioso sito dell'Ala al di lei asse è identico a quello, che con soluzioni alquanto diverse rilevarono l'Ermanno, il Wolfio, ed altri valentissimi Geometri. Ma poichè l'azion del vento sull'Ala quiescente è in parità di altre cose ben diversa di quella impressione, che recasi alla stess'Ala rotante (come dalle cose dichiaratevi nella Regola VI. potrete intenderlo); il calcolo di questo altro caso del Problema dee necessariamente racchiudere il *Dato della Volubilità dell' Ala*. Quindi di ciò avvedutosi il Sig. Daniele Bernulli, e do-e dopo di lui il Maclaurin, il d'Alembert, l'Eulero, e'l nostro P. Fontana han saputo risolvere questo secondo caso, che del primo è assai più malagevole: ponendovi a calcolo non pure il momento dell'impression del vento sull'Ala, che il di lei moto di girazione. E tai lavori di quest'incliti Geometri (a) meritano, che li consultiate. Ma non per tanto coteste soluzioni non reggon punto, quando suppongasi, che il vento spiri impetuoso sulle mentovate Ale, e che ne continui tal soffio. Poichè come nelle palle da cannone, che fendono velocissime l'aere, così nelle Ale da Mulino, sulle quali spiri impetuoso vento, l'impressione, che questi corpi ricevono dall'aria (b), non è come il quadrato della velocità della percossa, (sul quale principio fondasi il calcolo de'lodati Geometri), e come il seno dell'obbliquità di tal forza; ma in un'altra proporzione, che tuttavia s'ignora. E poi l'aria rimbalzata dalle rotanti Ale turba l'impeto, il numero, e la direzione de'successivi fila-

(a) Vedete Daniele Bernulli *Sez.* IX. *Idrodin.* Maclaurin *Traitè des Fluxions* d'Alembert *Traitè de l'equil. des fluid.* §. 368. Eulero *Nov. Com. Petr. Vol. IV.* e *nelle Memoir. de Berl.* Vol. VIII., e XII. P. Fontana *Append. su i Mulin. a Vent. nell' Idrodin. dell' Ab. Bossut.*

(b) Il Signor Robins ha sperimentato, che nelle palle da cannone la forza della percossa dell'aria, ch'esse fendono, sia in maggior ragione del quadrato delle velocità loro.

filamenti di esso fluido, che vanno a percuoterle. E tale indagine eccede ogni nostr'arte.

§. 173. DEFIN. XXXIV. Una Macchina dicesi *Uniforme*, se le sue parti dall'azion della Potenza, che le si adatti, ricevano moti equabili, o che questi sien progressivi, o angolari. E, se cotesti moti sieno variabili, ella si dirà *Difforme*.

§. 174. SCOL. I. Alla prima classe appartengonsi quelle Macchine destinate a trarre de' gran pesi, le *Mole frumentarie*, i *Timpani Calcatorj*, gli *Ordigni usi dalle donne per filar lana, bambagia*, &c., *le Ruote per far le corde, per aguzzare i coltelli*, ed altre simili. E del secondo genere sono le *Trombe Idrauliche*, cioè quelle Macchine, onde l'acqua da' luoghi bassi si porta in alto, le *Cartiere*, le *Gualchiere*, e quelle in somma, che agiscono sulla Resistenza con replicate percosse. Sicchè le Macchine, ch'io sopra distinsi in Naturali, ed Artificiali, in Semplici, e Composte, esigevano quest'altra divisione per lo differente moto delle parti loro. La qual cosa si vuol intender da Voi non per mera erudizione, ma perchè in pratica siavi di guida la seguente Teoria.

§. 175. REG. VII. *In una Macchina Uniforme richiedesi tanta forza per serbarvi quel moto, che vi si è destato, benchè velocissimo, quan-*

 ta

ta le regole dell' equilibrio di essa ne prescrivono.

Imperciocchè l' inerzia della Macchina, cui siasi impresso un qualche moto, varrebbe da se sola a mantenervelo, se la resistenza, e la frizione non lo affievolissero successivamente. Dunque una forza potente a reprimere i conati della resistenza, e della frizione, e con ciò tanto poderosa, quanto le regole dell' equilibrio di essa Macchina l' esigano, dovrà serbarvi quel primitivo moto. È quindi sarà vero, che nelle Macchine Uniformi richieggasi tanta forza a serbarvi il moto eccitato, quanta le regole dell' equilibrio loro ne prescrivono. E poi si renderà accelerato, o ritardato un tal moto, secondochè a serbarvelo s' impieghi una forza maggiore, o minore di quella, che vien indicata dall' equilibrio della Macchina.

§. 176. Cor. I. Con che se una Macchina Uniforme siasi talmente immaginata, ed eseguita, che per alzar 100. rotola, e per vincerne la di lei frizione ne basti una Potenza di 10. rot. di energìa; questa sarà ben anche sufficiente a mantenervi un qualunque moto uniforme, che vi sarà stato eccitato.

§. 177. Cor. II. In una Macchina ci vuol meno forza a serbarne quel moto, che vi si è destato, che a destarvelo.

§. 178. Reg. VIII. *Una Macchina Uniforme in parità di altre circostanze deesi preferire ad una*

una Difforme. Ed una Macchina, ch' è Difforme, tanto più si vantaggia, quanto rendansi meno variabili i suoi moti.

Quì sopra ho conchiuso, che ci vuol meno forza a serbarne in una Macchina un moto eccitatovi, che ad eccitarvelo. Or il moto eccitato in una Macchina Difforme estinguesi in ogn' istante per la gagliardìa della resistenza, ed in ogn' istante deesi dalla potenza riprodurre. Dunque la potenza soffre più dispendio di forza in una Macchina Difforme, che in un' altra Uniforme, quando le altre cose vadan del pari. E quindi le Macchine Uniformi sono preferibili alle Difformi: e tra queste quella n' è migliore, che ha i suoi moti meno variabili: e ciò in parità delle altre circostanze.

§. 179. Cor. I. Dunque in una Macchina composta di ruote, e di rocchetti non solo vuol procurarsi, che ciascuna di esse aggirisi equabilmente; ma che ogni ruota movente imprima equabilmente il suo moto a quell' altra, che ne muove. Ed a tal uopo i denti di queste ruote debbono avere una particolar figura, di che ha discorso Eulero nel *Vol. V. Comm. Nuov. Pietrob.*

§. 180. Cor. II. E le Macchine destinate ad agitare gli stantuffi delle Trombe Idrauliche, quelle che a vicenda elevano e deprimono certi pestelli, e quell' altre, onde a colpi di martelli si gualciscono i panni, o si fan delle le carte, debbono essere con tal giudizio congegnate, che da' rimbalzi de' corpi percuzienti non iscuotasi la Macchina; affinchè la Potenza non vi soffra un inutile dispendio della sua forza.

§. 181. Scol. Per evitare lo scotimento, che una Macchina potrebbe ricevere da' rimbalzi de' martelli, ch' ella muove; i manubrj di questi soglion farsi incurvati: imperciocchè assai fievole ritorna in tal caso da' martelli alla Macchina il movimento.

§. 182. Reg. IX. *Se una Macchina Uniforme non abbia frizione, nè moti inutili; il momento di effetto sarà quanto quello d' impulsione.*

Qualor si prescinda dalla frizione di questa Macchina, e da que' moti inutili, che sovente vi si eccitano a dispendio della Potenza, non v' ha dubbio, che tutta l' energìa della Potenza debbasi impiegare alla sola promozion del peso, e che l' inerzia della Macchina ne serbi il di lei moto. Dunque la forza impellente moltiplicata (a) per la sua velocità adegua il prodotto del peso nella velocità di questo: cioè il momento d' impulsione è quanto quello di effetto (173).

(a) Per poco che si rifletta sulle Macchine, e sulle leggi dell' equilibrio loro, si vedrà, che supponendole immateriali debba esser la Potenza alla Resistenza, come la velocità di questa alla velocità di quella: imperciocchè gli spazj, che in uno stesso tempo descrivono tali forze, sono inversamente come l' energìe di queste. Così in un' Argano, ove suppongasi il raggio della ruota esser decuplo di quello del cilindro, si vedrà che la velocità della Potenza debba essere anche decupla di quella del peso, che vi si trae: e che, prescindendovi da ogni resistenza della Macchina, debba esser la Potenza una decima parte di quel peso. E così convenevolmente ragionando nelle altre Macchine potrà concludersi, che in ciascuna di esse la Potenza, e la Resistenza debbano essere in ragione inversa delle velocità loro: onde il momento d' impulsione debba pareggiar quello di effetto.

§. 183. Cor. I. Dunque in tal caso al massimo momento d' impulsione (173) dovrà corrispondere il massimo momento di effetto.

§. 184. Cor. II. E quindi con uno stesso momento d' impulsione volendosi animare ora una Macchina, ed ora un' altra, non dovrà ottenersi, che uno stesso effetto: qualor si prescinda dalle frizioni, e da' moti inutili di queste Macchine.

§. 185. Cor. III. E quindi all' indarno si van logorando il cervello quegl' Ingegneri, che si applicano a ritrovare Macchine, ove con un dato momento d' impulsione si potesse ottenere un grandissimo momento di effetto. E per essi sarebbe miglior consiglio l' applicarsi a *ritrovare una Macchina, il di cui momento d' effetto quasi ne pareggi quello d' impulsione, o ch' ella abbia una menoma frizione, e sia sgombra d' inutili movimenti.*

§. 186. REG. X. *Tra le Macchine Uniformi animate con uno stesso momento d' impulsione giova sceglier quella, che abbia la minima frizione, e dove non vi sia verun moto inutile al fine, cui ella destinasi.*

La verità di questa Regola è chiara dalle cose precedenti. Dunque in pratica badisi ad evinare que' moti superflui, che si scorgono in una Macchina fatta, o da farsi: poichè non concorrendo essi in verun modo al fine della Macchina, son di gran dispendio alla forza della Potenza. Così nelle due trombe idrauliche, onde l' acqua succhiata da un sottoposto serbatojo menasi per de' cannoni di metallo in quel lunghissimo tubo, dalla cima del quale ne va ella fluendo in una *vasca*, soglion prodursi varj dispendj della forza impellente pe' varj moti inutili, che vi si eccitano. Le cagioni di questi dispendj sono *l' eccedente velocità, con cui l' acqua monta alla cima di quel tubo: la turbazion del moto di questo fluido prodotta dalla continua, e vicendevole confluenza di que' due Cannoni: i moti orizzontali generati nell' acqua salente entro del tubo: l' imperfetto combaciamento degli stantuffi colle concavità delle due trombe, onde l' acqua suol trapelarne su di essi con consumo della forza impellente: ed altre simili cose.*

§. 187. SCOL. Le quantità di questi dispendj, e le cautele sono state esaminate dal celeb. Daniele Bernulli nella sua Idron. Sect. IX.

§. 188.

§. 188. REG. XI. *Una Macchina, che facciasi dalle braccia degli uomini animare, vuol esser talmente fatta, che dia il massimo effetto col minimo debilitamento delle loro forze.*

Sì fatta investigazione dee essere meccanica, e fisiologica, perchè vuol calcolarsi quanto si guadagni di forza in ciascuna di queste Macchine, e di quanto restino spossate le braccia degli uomini, che la muovono. E da ciò potrà rinvenirsi la lunghezza delle stanghe di un dato argano, quella de' remi da porsi in una barca, il raggio di un timpano calcatorio, &c.

§. 189. REG. XII. *Nelle Macchine oltre a' vantaggi meccanici, de' quali vi ho discorso ampiamente ne' Capitoli precedenti, e che si riducono a' risparmj di tempo, e di forza, ve ne ha degli altri relativi a' fini particolari cui esse destinansi, al luogo ed al tempo in che debbano agire, ad un risparmio economico nell' animarle, o ad altre esterne circostanze, le quali debbonsi attentamente conoscere, e calcolare da chi tali Macchine proponga.*

Il divisare a disteso tutte queste cose non appartiensi al Meccanico, nè al Geometra; ma il tacervele sarebbe un difetto d' instituzione. Laonde vi dico solamente, per comentar questa Regola, che se dovreste animare una Mole frumentaria là ove siavi abbondanza d' acqua profluente, tosto ne pensereste

ste dovervisi costruire un Mulino ad acqua. E se quivi scarseggi l'acqua, e vi spiri vento impetuoso, chi di voi è sì tardo d'intendimento, che non vi proponga un Mulino a vento? Un luogo, che abbondi di que' quadrupedi, che domansi nel dorso, e nel collo, vi darà l'agio di preferir queste Potenze nell'animar certe Macchine: e se una regione abbondi d'uomini di servil condizione, o di persone ascrittizie, il mantenimento delle quali sia di poca spesa, dalle di loro braccia gioverà muover certe Macchine (*a*).

CAP.

(a) Nelle vicinanze dell'antica Stabia fu da noi ritrovato non ha guari un Macinatojo, onde solevano i Romani cavar l'olio dalle ulive spremendole senza frangerne i noccioli, e forse v'impiegavano le braccia degli Schiavi, de'quali l'Italia erane ingombra. Questa Macchina è una Conca di dura pietra, in mezzo alla quale ergesi un forte sostegno per imperniarvi una lunga stanga, che orizzontalmente vi si aggira. D'accanto al sostegno vi son due segmenti sferici della stessa pietra, come due mole: essi sono uguali fra loro, e ciascuno minore dell'emisfero: e le loro basi, che son rivolte al sostegno, stanno erte verticalmente, e sono attraversate per mezzo dalla stanga. Laonde volgendosi la stanga orizzontalmente, vi si aggirano per tal verso le due mole, e nello stesso tempo le rotan d'intorno. E quindi tra'l convesso di loro, e tra'l cavo della Conca spremono le ulive, che vi si metton dentro, senza frangerne i noccioli. E se questi si vogliano frangere, si scosteranno un poco le mole dal sostegno, e si farà agir la Macchina come prima.

CAP. VIII.

Dimostrazioni di alcuni Principj Statici.

PROP. XXIII. TEOR.

§. 190. *Sia A C B una Ruota volubile intorno al centro C, ed agli estremi A, e B de' suoi raggi C A, C B sieno applicate le due forze A P, B Q; io dico che in caso di equilibrio debbansi uguagliare i prodotti di ciascuna forza nel dilei spazietto di accesso, o di recesso.* Fig. 19 n. 1.

Dim. Intendasi la ruota A C B concepire un picciol moto di rotazione; ond'ella dal sito A C B si trasferisca nell'altro prossimo a C b. Sarà chiaro dovervisi generare gli uguali angoli A C a, B C b, ed i settori simili A C a, B C b: e che ne debba essere A a : B b :: C A : C B. Ciò posto le due rette A P, B Q dinotino le intensità, e le direzioni delle forze applicate in A, e B; ed esse forze s'intendano in P, e Q concentrate. E poi si descrivano gli archetti circolari a R, b K co' centri P, e Q, e cogl'intervalli P a, Q b. Sarà A R lo spa-

spazietto di accesso della prima forza, e BK lo spazietto di recesso dell'altra (234 Mec.).

E poichè l'angolo CAa è retto; gli altri due ad esso adjacenti CAH, RAa dovran fare un altro retto. Ma son benanche uguali ad un retto gli angoli acuti RaA, RAa del triangoletto ARa, che può aversi come rettilineo, e rettangolo in R. Dunque saranno i due angoli CAH, RAa uguali agli altri RaA, RAa: e quindi toltone il comune RAa, dovrà restare l'angolo CAH uguale all'altro RaA. E perchè nell'altro triangoletto BKb rettangolo in K i due angoli acuti KBb, KbB sono uguali ad un retto, e quindi all'angolo CBb, ch'è retto; tolto di comune l'angolo KBb, dee rimanervi l'angolo KbB uguale a CBK. Sicchè i seni degli angoli CAH, CBK, respettivamente uguagliando i seni degli angoli AaR, BbK, saranno (*a*) come AR a BK, e come Bb ad Aa. Ma si è dimostrato essere Aa : Bb :: CA : CB: dunque sarà sen. CBK : sen. CAH :: (BK : AR) (CA : CB).

Ciò premesso, per equilibrarsi le due forze AP, BQ applicate a volger la ruota ACB, (65) dee stare AP : BQ :: (CB : CA) (sen. CBK : sen. CAH). Dunque sostituendo alla ragione di questi seni quella, che dian-

(a) Pren. XIV. Vol. I.

dianzi se l'è mostrata uguale, avrassi AP : BQ :: (CB : CA) (BK : AR) (CA : CB), cioè AP : BQ :: BK : AR, ed AP . AR = BQ . BK. C. B. D.

§. 191. Cor. Si chiami P l'intensità della forza applicata all'estremo di un raggio della ruota, il quale si dica R: e sia ϕ l'angolo d'applicazione della forza P al raggio, e $\pm$ dp la velocità virtuale della stessa forza; sarà sen. $\phi = \pm$ dp : R, e quindi il momento della forza P, ch'erasi (81) mostrato uguale a P. R. sen. ϕ, sarà $\pm$ Pdp.

§. 192. Scol. Le Macchine semplici, come vi si è indicato quì sopra (100), non son che diversi sistemi di tre forze equilibrantisi, applicate ad un punto (*a*), ad una retta, o ad

(a) La riduzione di un Piano Inclinato ad una Leva non mi è sembrata sì naturale, come l'han creduta il de la Hire, il Desaguliers, ed altri. Ond' io ponendomi un giorno ad investigare, se quel Piano poteva ridursi al *sistema di tre forze equilibrantisi applicate ad un punto*, tosto ne vidi una semplice dimostrazione; che, se non mi fosse giunta troppo tardi, ve l' avrei recata nella prop. XI., in vece di quella, che vi si legge. Intanto eccovene la di lei orditura.

Quando il corpo P posando sul piano obbliquo VN *Fig.4.*
siavi ritenuto dalla Potenza PF, si possono concepir combinate nel punto P queste tre forze, la *Potenza agente per* PF, *il Peso per la verticale* PL, *e la resistenza del piano per la* PH *normale* a PM. La verticale PL producasi all' insù, e da un punto Z di questa parte protratta si tirino ZX, ZY parallele ad HP, e PX,

ad un triangolo. Dunque il Principio delle velocità virtuali, che nella Meccanica (§.236) vi dimostrai esser vero rispetto a tre forze, che si equilibrano, il sarà pure rispetto alle Macchine semplici, da cui potrà estendersi anche alle composte. Ma in grazia de' Giovanetti, e per l'unità del metodo era conveniente saggiar la verità di questo Principio nella Ruota A C B, onde più facilmente il possiate alle Macchine applicare.

§. 193. Defin. XXXV. Il *Centro di gravità di un Sistema di Corpi* è quel punto intorno a cui essi dovrebbonsi equilibrare, se con verghe immateriali si unissero i centri di gravità loro.

§. 194. Cor. I corpi di questo sistema non sieno, che i due soli A, e B: si tiri
Fig.20. pe' loro centri di gravità A, e B la retta
n. 1. A B, ed ella poi si divida in C, sicchè i suoi seg-

e P X, e poi si compia il parallelogrammo Z X P Y. Le rette P X, P Z, P Y dovranno respettivamente esprimere quelle forze, che si son supposte equilibrarsi nel piano obbliquo: e sarà la Potenza al Peso, come P X a P Z, o come il seno dell'angolo Z P Y al seno dell'altro X P Y. Ma il seno di Z P Y, o di H P L è quanto quello di P T O. E'l seno di X P Y pareggia il coseno di F P E. Dunque sarà la Potenza al peso come il seno dell'obbliquità del piano al coseno dell'angolo di F P E: come per altra via vel dimostrai nella Prop. XI. Dunque è vero che il Piano inclinato è un sistema di 3. forze equilibrantisi applicate ad uno stesso punto.

segmenti A C, e B C sieno come i pesi de' corpi B, ed A; sarà il punto C (511. Mecc.) il centro di gravità de' corpi A, e B. E se Fig.20.
vi si aggiunga il terzo corpo H, e si unisca n. 2.
la C H, la quale si divida in c, sicchè stia C c a c H come H ad A + B; sarà il punto c il centro di gravità de' tre corpi A, B, H. Imperocchè tanto è che i corpi A, e B sieno tra se disgiunti alla distanza A B, quanto che si trovassero accolti in C, centro di gravità di essi. E così può istituirsi il ragionamento per quattro corpi, per cinque, &c.

PROP. XXIV. TEOR.

§. 195. *Se un sistema di corpi si trovi dalla stessa parte di un piano; la somma de' prodotti di ciascun di essi nella distanza del di lui centro di gravità dal piano sarà uguale alla somma degli stessi corpi moltiplicata per la distanza, che ha dal piano il centro di gravità del sistema.*

Dim. Cas. I. Questi corpi non sieno, che Fig.20.
i due soli A, e B: ed abbassate sul piano n. 1.
x y le perpendicolari A D, B G, C F tanto da' centri di gravità di essi corpi, che dal punto C centro di gravità del loro sistema, (le quali rette, com'è chiaro, giacciono in

in uno stesso piano) si distenda per C la retta M C N parallela a quella, che passa pe' punti D, e G. Saranno simili tra loro i triangoli A C M, B C N; e quindi A M a B N, come A C a C B, o come B ad A (511. Mecc.) : e sarà A. A M = B. B N. E poichè (A+B) C F è uguale ad A . M D + B. N G, per essere M D, ed N G uguali alla C F : ed è poi A . M D = A. A D + A. A M (*a*), cioè uguale ad A. A D + B. B N; sarà (A + B) C F = A. A D + B. B N + B. N G = A. A D + B. B G

Fig. 20. n. 2. Cas. II. Il proposto sistema abbia solo i tre corpi A, B, H : dai centri de' quali, e da quello del sistema c si calino sul piano X Y le perpendicolari A D, B G, H K, c f: e poi dal punto C, centro di gravità de' corpi A, e B, si meni C F perpendicolare sullo stesso piano. Sarà per lo caso prec. (A + B) C F = A. A D + B. B G. Ma il punto c, ch' è centro di gravità de' tre corpi A, B, H, è anche centro di gravità del corpo H, e della somma degli altri due posta in C (194). Dunque per lo caso prec. sarà (A + B + H) c f = (A + B) C F + H. H K = A. A D + B. B G + H. H K. Per la qual cosa potendosi questo medesimo filo di dimostrazione applicare ad un sistema di quattro corpi, di cinque, di sei, &c., sarà vero quanto generalmente ho proposto quì sopra. C. B. D.

§. 196.

(a) Prop. 1. El. II.

§. 196. Defin. XXXVI. Il Corpo A moltiplicato per la distanza del suo centro di gravità da un dato piano dicesi *Momento del corpo A rispetto ad esso piano*, o semplicemente *Momento di A*. E lo stesso intendasi di ogni altro corpo del sistema.

§ 197. Cor. I. *I Momenti de' corpi di un sistema sono uguali al momento della loro somma raccolta nel centro di gravità del sistema.*

§. 198. Cor. II. E se le masse de' corpi di un sistema si chiamino A, B, C, &c. ed a, b, c, &c. sieno le respettive distanze de' loro centri di gravità da un dato piano, da cui ne disti per x il centro di gravità del sistema; sarà A . a + B . b + C . c &c. = (A + B + C + &c.) x . E sarà x = (A. a + B. b + C . c + &c.) : (A + B + C + &c.)

§. 199. Cor. III. Le verità, che ho dimostrate in questa proposizione, ne fan conoscere il metodo, con cui si suol determinare il centro di gravità nelle figure. „ In fatti B A D sia una
„ qualunque figura, che abbia per base la B D,
„ e la C A passi per lo punto medio di que-
„ sta, e per lo vertice A della figura. Le Fig. 24.
„ di lei sezioni N P, n p sieno vicinissime
„ fra loro, e parallele alla B D. Si potrà sup-
„ porre, che la massa di N n p P sia come un
„ picciol peso, il quale abbia in M r il suo cen-
„ tro di gravità, e che la retta M R ne sia la
„ distanza di questo centro dal piano R A G
„ disteso per lo vertice della figura parallelo

I „ alla

„ alla di lei base. Sicchè ponendo la se-
„ zione NP uguale ad y, e ad x la MR;
„ sarà $Mm = dx$, lo spazio NnpP sarà
„ ydx, e'l momento di questo picciol peso
„ (196) dovrà essere $yxdx$. Dunque (198)
„ la distanza, che ha dal vertice A il cen-
„ tro di gravità della figura NAP, sarà
„ uguale a $(\int yxdx) : \int ydx$. Per la qual
„ cosa se ne' Problemi particolari integrisi
„ tanto il numeratore, che il denominatore
„ della rapportata frazione, *avrassi nella* CA
„ *la distanza del centro di gravità della figura*
„ *dal di lei vertice*. „

§. 200. Esemp. I. La figura BAD sia un triangolo rettilineo, la cui base BD sia b, ed a la sua altezza AL. E ponendo $MR = AQ = x$; sarà NP, che si espresse per y, uguale a $(bx):a$. Dunque sarà $(\int yxdx):(\int ydx)$ uguale a $\left(\int \frac{bx^2dx}{a}\right) : \left(\int \frac{bxdx}{a}\right)$, cioè a $\left(\frac{bx^3}{3a}\right) : \left(\frac{bx^2}{2a}\right)$, o finalmente a $\frac{2x}{3}$. E quindi il centro di gravità dell' intero triangolo BAD sarà nella CA, e disterà per $2a:3$ dalla RA parallela alla BD: ponendo a in luogo di x nel fratto $2x:3$. Cioè *il centro di gravità di un triangolo rettilineo è nella retta, che dal suo vertice conducesi al punto medio della base, e propriamente in quel punto, che dal vertice ne disti per due terzi di essa retta*.

§. 201. Esemp. II. Sia BAD un cono uniformemente denso, AC il suo asse, ed NP una qualunque sezione fatta in esso parallela alla base BD. Sarà l'aja di tal sezione, ch' è un cerchio, ad AQ^2, in una costante ragione. Questa ragione esprimasi per quella di m ad 1; sarà $y = mxx$. E la formola $(\int yxdx):(\int ydx)$ si cangerà in quest' altra $(\int mx^3dx):(\int mxxdx)$, che integrata nel numeratore, e nel denominatore, e poi ridotta, diverrà uguale a $\frac{3}{4}x$. E supponendo la variabile x uguale ad AC, che si chiami a; sarà la distanza, che avrà il centro di gravità del cono dal piano GAR condotto per lo di lui vertice parallelo alla base, uguale a $\frac{3}{4}$ del di lui asse, e starà nel medesimo asse. Cioè *il centro di gravità di un cono di materia omogenea è nel di lui asse, e dista dal vertice per $\frac{3}{4}$ dell' asse*.

PROP. XXV. TEOR.

§. 202. *Se i corpicciuoli* M, M', M'' &c. *sieno respettivamente animati dalle forze consenzienti*
Fig. 21. n. 1. f, f', f'', &c, *per direzioni parallele; il loro comun centro di gravità C avrà lo stesso moto, che se in C s' intendessero raccolti tutti que' corpicciuoli, ed animati da una sola forza quanto la somma delle loro forze* f, f', f'', &c. *e per una direzione parallela alle loro direzioni.*

Dim. Immaginatevi, che que' corpicciuoli nel tempuscolo d t abbiano respettivamente percorsi gli spazietti M m, M' m', M'' m'', &c, mentre il loro centro di gravità C n'è disceso in c: e che questi spazietti, i quali dall' Ipotesi son paralleli, protratti in su incontrino ad angoli retti un piano disteso per la retta A B Q D, ovunque ella ne stia. Sarà (195) M . M A + M' . M' B + M''. M'' D + &c. = (M + M' + M'' + &c.) C Q. E per la stessa ragione sarà pure M . m A + M' . m' B + M''. m'' D + &c. = (M + M' + M'' + &c.) c Q. Dunque togliendo quella equazione da questa avremo M . M m + M'. M' m' + M''. M'' m'' &c. = (M + M' + M'' + &c.) C c: e quindi sarà

C c = (M . M m + M'. M' m' + M''. M'' m'' + &c.) : (M + M' + M'' + &c.) *N*

Or gli spazietti M m, M' m', M'' m'' &c. descritti da' divisati corpicciuoli nel tempuscolo d t (8. Mecc.) sono come le velocità loro, e queste (70. Mecc.) come f : M, f' : M', f'' : M'', &c. respettivamente. Dunque saranno gli spazietti M m, M' m', M' m'', &c. come f : M, f' : M', f'' : M'', &c. E sostituendo in *N* queste grandezze in luogo di quegli spazietti, avremo

C c = (f + f' + f'' + &c.) : (M + M' + M'' + &c.)

Ma di tal grandezza sarebbe altresì lo spazietto, che nel tempuscolo d t (8. 67. Mecc.) vi descriverebbe la massa concentrata de' corpicciuoli M, M', M'', &c, spinta per C c da una forza uguale ad f + f' + f'' + &c. Dunque tant' è il moto de' corpicciuoli M, M', M'' &c. respettivamente animati dalle forze f, f', f'' &c., per direzioni parallele tra loro, e consenzienti, quanto quello, che vi si ecciterebbe, concentrandoli nel centro di gravità del loro sistema, e spignendoli con una sola forza uguale alla somma delle date, e per la direzione loro. C. B. D.

§. 203. Cor. Egli è chiaro, che tutti gli elementi di uno stesso corpo traggansi all' ingiù per direzioni verticali, e con ciò parallele fra loro. Dunque si potrà *concepire, che tal corpo graviti sul solo centro di gravità, e che quivi come in proprio seggio raccolgasi ogni suo peso, e gravezza.*

PROP. XXVI. TEOR.

§. 204. *La Leva immateriale* QAD *sia onusta de' due pesi* B, D *inegualmente distanti dal centro* Q *di rotazione; dico esser la somma de' momenti loro nell' aggirarla intorno a* Q, *quanto il momento di essi pesi rammassati nel centro di gravità loro.* Fig. 23. n. 1.

DIM. Sia C il centro di gravità de' due soli pesi B, D; sarà, in virtù della Pren. XX. della Meccanica, CB.DQ + DC.BQ = DB.CQ. Ma, dal supporsi che sia C il centro di gravità de' pesi B, e D, le rette CB, DC, DB esprimono respettivamente le masse del corpo D, dell' altro B, e della somma loro (194). Dunque sarà D.DQ + B.BQ = (D + B) CQ: cioè (196) la somma de' momenti de' corpi D, e B nell' aggirar la Leva intorno a Q sarà quanto il momento della somma di essi applicatale nel centro C di gravità loro. C. B. D.

Altra dimostrazione dello stesso assunto.

§. 205. Per lo punto Q si tiri un piano perpendicolare a QD; sarà per la Prop. XXIV. B.BQ + D.DQ = (B + D) CQ. Cioè i momenti de' corpi B, e D saranno uguali al momento della loro somma (196) applicata in C centro di gravità di essi. C. B. D.

§. 206. COR. Colla guida di questa seconda dimostrazione può raccogliersi una verità assai generale: ed è, *che il momento di un solido, il quale faccia leva intorno ad una di lui sezione, sia quanto l' intera massa del solido moltiplicata per la distanza del di lei centro di gravità dalla sezione.*

§. 207. SCOL. La verità di questo Teorema adottato da alcuni Meccanici, come Assioma, esigeva una rigorosa dimostrazione: onde a tal uopo ve l' ho qui recata in due guise.

PROP. XXVII. PROBL.

§. 208. *Ritrovare il centro di oscillazione della verga rigida, ed immateriale* QABD, *che abbia i pesi* A, B, D, *&c. a disuguali distanze dal di lei estremo* Q, *ov' è sospesa.* (a) Fig. 23. n. 1.

SOL. La somma de' Momenti d' inerzia de' pesi A, B, D, &c. dividasi per la somma de' momenti degli stessi pesi (136. 81.); sarà tal quoto la cercata distanza del centro di oscillazione dal punto di sospensione.

I 4 DIM.

(a) Cristiano Ugenio, che nella sua giovinezza erasi indarno applicato a ritrovare i centri di oscillazione, ne venne a capo nell' età virile, quando le più am-

DIM. Il punto C della verga QABD sia l'addimandato centro d'oscillazione : CQ la sua distanza dal punto Q di sospensione : e questa retta si chiami x ; sarà puranche uguale ad x la lunghezza di quel Pendolo semplice, che avendo nel suo estremo inferiore un qualunque peso P ne sia isocrono a questa verga oscillante (475.Mecc.). Inoltre il Pendolo semplice, e la data verga intendansi rimossi ad angoli uguali da' loro perpendicoli, di dove si lascino insiem cadere ; saranno tra se uguali quelle velocità angolari, che alla fine di uno stesso tempo avran concepute questi due corpi oscillanti. Ma la

ampie cognizioni della sua mente, e'l maggior impegno, ch'ei concepì di compier la Teorìa de' Pendoli, gli fecero scoprire questo bel Teorema. *Se i pesi di un Pendolo Composto, dopo aver ei compita una parte della sua oscillazione, si staccasser di repente dalla verga, che gli unisce, e ciascuno colla velocità acquistatasi si sospignesse ; il centro di gravità di questi corpi ascendenti dovrà montare a quell' altezza, donde nella vibrazione erane disceso.* Vale a dire, se la verga rigida QD, ed onusta de' pesi A, B, D si lasciasse liberamente cadere dal sito QD, ed arrivando in Qd ne percuotesse il piano immobile QG, sicchè que' pesi disciolti dalla verga risaltassero colle proprie velocità d'incidenza per le aM, bN, dR perpendicolari al piano QG ; l'altezza, ove sale il centro di gravità de' corpi a, b, d disciolti, sarà quanto quella, da cui ne discese il centro degli stessi corpi A, B, D tra lor congiunti. Ciò posto, se le distanze de' pesi a, b, d dal punto Q di sospensione dicansi respettiva-

la velocità angolare del Pendolo semplice è (137) uguale a $(Px):Px^2$, cioè ad $\frac{1}{x}$. E la velocità angolare della verga è quanto $(A.AQ + B.BQ + D.DQ\ \&c.) : (A.AQ^2 + B.BQ^2 + D.DQ^2 + \&c.)$. Dunque sarà $\frac{1}{x} = (A.AQ + B.BQ + D.DQ + \&c.) : (A.AQ^2 + B.BQ^2 + D.DQ^2 + \&c.)$. E quindi

$$x = \frac{A.AQ^2 + B.BQ^2 + D.DQ^2 + \&c.}{A.AQ + B.BQ + D.DQ + \&c.}$$

§. 209. COR. I. Nella soluzione di questo Pro-

tivamente m, n, r, e sia x la distanza del centro C di oscillazione dal punto Q, ed y dinoti il seno verso $y\,t$ dell'arco $c\gamma$, che il punto c descrive in una mezza vibrazione ; saranno $my:x$, $ny:x$, $ry:x$ i respettivi seni versi degli archi simili $a\alpha$, $b\beta$, $d\delta$, che nella stessa mezza vibrazione descrivono i da' pesi a, b, d. E le medesime espressioni dovran dinotare le rispettive altezze dalle quali ne son caduti i pesi a, b, d tra loro uniti. Per la qual cosa se le masse di tali corpi si chiamino A, B, D ; moltiplicando ciascuna di esse per l'altezza, ond'ella n'è caduta, e dividendo la somma di tai prodotti per la somma delle medesime masse, avrassi per quoto l'altezza, da cui n'è caduto (108) il centro di gravità di esse. Cioè a dire quest' altezza dovrà essere $(Am + Bn + Dr)y : (A + B + D)x$. Or (137. 153. n.1.Mec.) le altezze, alle quali ascendono più corpi proiettati all' insù verticalmente, sono come i quadrati delle ve-

Problema contiensi una facilissima, ed elegante regola, onde determinare i centri di oscillazione. Cioè *in una verga rigida, che onusta di più pesi oscilli intorno ad un di lei estremo, avrassi la distanza di quest' estremo dal centro di oscillazione; se la somma de' momenti d' inerzia di que' pesi dividasi per la somma de' momenti degli stessi pesi*.

§. 210. Cor. II. Quel Pendolo semplice, e la verga Q B D intendansi rimossi ad angoli uguali da' loro perpendicoli, e quivi lasciati insiem cadere; saranno *tra se uguali le velocità angolari di questi due corpi oscillanti* (475.Mec.). Di più *il centro di oscillazione della verga avrà l' iden-*

l' identico moto, e l' identica accelerazione del Peso P di esso Pendolo (475.Mec.). Ed in terzo luogo *i corpi* A, B, D, &c., *de' quali è caricata la verga, avranno disuguali velocità, e diverse forze accelcratrici*.

§. 211. Cor. II. Le velocità, che hanno i pesi A, B, D in ogni momento dell' oscillazion della verga rigida Q A D, sono sempre come le Q A, Q B, Q D: lo che è chiaro da per se stesso. Dunque in *questa ragione dovranno essere le forze acceleratrici de' corpi* A, B, D (115.Mecc.).

§. 212. Scol. La verga rigida Q A B, *Fig.23. n. 2.*
alla quale sieno connessi i due corpi A, e B,
stia

velocità di proiezione: e le velocità, onde sospingonsi
il corpo a, e 'l centro c di oscillazione, quando essi sian
giunti al perpendicolo Q δ, sono nella ragione di Q a
a Q c, cioè, come m ad x. Dunque starà x x ad m m,
come y, ch' è l' altezza, alla quale ascende il centro di
oscillazione, ad un quarto: che sarà l' altezza, ove ne
monta il corpo a disciolto dagli altri. La quale altez-
za sarà m m y : x x. E per un simile ragionamento sa-
ranno n n y : x x, ed r r y : x x le altezze, alle quali
estolgonsi gli altri corpi b, e d disgiunti dalla verga,
e sospinti in β, e δ colle velocità acquistatesi in que-
sti punti. Dunque moltiplicando siffatte altezze pe' re-
spettivi corpi, e dividendo la somma di tali prodotti
per la somma de' corpi (198) avrassi l' altezza, alla qua-
le ha dovuto salirne il centro di gravità de' corpi ascen-
denti da' punti α, β, δ. E tal altezza sarà y (A m m +
B n n + D r r) : (A + B + D) x x. Ma in forza di
questo Teorema Ugeniano l' altezza della discesa del
centro di gravità de' corpi uniti a, b, d adegua l' altez-
za,

za, alla quale ascende il centro de' medesimi corpi disgiunti fra loro, e sospinti colle proprie velocità finali. Dunque sarà (m A + n B + r D) y : (A + B + D) x = y (A m m + B n n + D r r) : (A + B + D) x x: e quindi x = (A m m + B n n + D r r) : (A m + B n + D r). E questo è il modo, onde da quel Teorema può rinvenirsi il centro di oscillazione nelle verghe rigide, ed onuste di più pesi.

E volendo universalizzare il divisato Teorema potran raccorsi le verità seguenti. I.° *Il centro di gravità di più corpi, che seco uniti muovonsi per lo proprio peso, comunque ciò ne accada, è sempre determinato a salir tant' alto, quanto ei ne discese*. II.° *La somma de' prodotti di ciascun peso nel quadrato della di lui velocità è proporzionale alla somma de' corpi moltiplicata per l' altezza, dalla quale è disceso il centro di gravità di essi*. III.° E se col Sig. Daniele Bernulli chiamiamo *Discesa Attuale* quell' altezza, donde il centro di gravità di tali corpi è realmente calato: ed *Ascenso Potenziale* quell' alte stia imperniata in Q, e disposta nel sito orizzontale QAB, di dove si lasci di per se liberamente cadere. Sarà la forza acceleratrice, che nel principio del moto avrà la verga nel centro O di oscillazione, quanto quella, ch'è de' gravi cadenti per linee verticali: imperciocchè il moto di O è identico a quello di un peso P, che starebbe all'estremo del Pendolo semplice isocrono alla verga QAB (210). Sia 1 questa forza acceleratrice, e si chiamino A, e B le masse de' corpi A, e B: e le loro distanze dal punto Q di sospensione sieno uguali ad m, ed n: ed x sia quella, che ne abbia da Q il centro O di

altr' altezza, cui salirebbe lo stesso centro, se colla velocità finale ciascun corpo separato dagli altri si sospignesse; *sarà sempre l' Ascenso Potenziale di un Sistema di corpi, quanto la di lui discesa Attuale*. Ed in ciò risiede quel famoso Principio della Conservazione delle forze vive, di cui si prevalse il lodato Bernulli per calcolare i moti de' fluidi.

Ma non erano scorsi due lustri, da che l' Ugenio per questa Teorìa accoglieva i generali plausi de' Matematici, quando dalle Gallie il Sig. Abate Catelano ardì d' abbatterla, dichiarando falso quel Teorema, su cui regeva. Ed erigendo un nuovo sistema sulle ruine dell' Ugeniano vi stabilì, I. *che in un Pendolo Composto la somma delle velocità de' pesi, che vibran legati, debba pareggiare la somma delle velocità, che ciascuno di essi avrebbesi acquistata vibrando solo, senza che vi fosser gli altri*. II. E che *il tempo dell' oscillazione di quel Pendolo Composto sia medio aritmetico tra i tempi delle oscillazioni di que' pendoli semplici*.

Co-

O di oscillazione. Sarà la forza acceleratrice del corpo A non già uguale ad 1, ma ad $\frac{m}{x}$: imperciocchè tal forza dee stare alla forza acceleratrice del centro O, o del corpo P, la quale è 1, come m ad x (115. Mec.): e sarà la forza motrice di A (*a*) uguale ad $\frac{A\,m}{x}$: e sarà poi $A - \frac{A\,m}{x}$ lo scapito della natìa forza motrice del corpo A, che gli si è recato

Cotesta Teorìa Ugeniana, nol niego, richiedeva maggior luce, ed ampiezza. Ma assai mi spiace la precipitanza del Sig. Abate nell' abbatterla, e nell' ergervi questi due Teoremi senza averne specolato ben bene le verità loro, e ragguagliati insieme i risultati. Onde m' immagino, ch' ei se ne dovette seco vergognare al sentir dall' Ugenio, e da altri, che i *suoi Teoremi davano il centro di oscillazione a diversi punti: che facevano montare a differenti altezze il centro di gravità de' pesi ascendenti: che vi si confondeva il centro di gravità con quello di oscillazione: e ch' essi accoglievano altre contraddizioni*. Ma intanto Cristiano Ugenio colle prime risposte alle objezioni del Catelano urtò le sole conseguenze del sistema avverso; mentre doveva fugar que' Principj, che preoccupando la mente del Catelano non le facevano vedere il vero. Onde questo Letterario piato sarebbe ito più oltre, se i valentissimi Geometri Giacomo Bernulli, e 'l Marchese de l' Hospital destatisi a garantire il vero non avessero direttamente confutato il Catelano con salde ragioni della Meccanica.

Ed

(a) La quantità motrice di una forza centripeta è uguale alla di lei quantità acceleratrice moltiplicata per la massa del corpo, che da essa forza n' è animato §. 88. Mecc.

to per la connessione, ch'ei tiene coll'altro B, Or questa forza $A - \frac{A\,m}{x}$ non si distrugge, ma influisce nel corpo B: e 'l momento della stessa forza $A - \frac{A\,m}{x}$ ridotta al punto B è uguale (81) ad $m\,A\,(x - m) : n\,x$. Dunque questa grandezza dovrà dinotare il soprappiù di forza motrice, che dee averne il corpo B. Or la forza motrice del corpo

po

Ed in fatti Giacomo Bernulli dalle proprietà della Leva dimostrò falso il primo Teorema dell'avverso sistema, e vi fondò un nuovo metodo per indagare i centri di oscillazione: e'l Marchese de l'Hospital rettificando tal metodo l'adattò leggiadramente a varj casi, uno de' quali è quello, che vi ho qui sopra esibito nello Scolio di questo Problema.

Intanto il Sig. Giovanni Bernulli, che pareva nato per le invenzioni sublimi, ed eleganti, si pose ancor egli a meditare su questo soggetto, e gli riuscì di ritrovare i centri di oscillazione per un metodo diverso dall'Ugeniano, e dal fraterno; ma di questi più brieve, e luminoso. Un tal metodo, ch'ei fece registrare negli Atti di Lipsia del 1714. (cioè 30. anni dopo della riferita Invenzione dell'Ugenio), ed in que' di Parigi del 1717, è fondato sul calcolo delle velocità angolari, com'io vi ho risoluto il presente Problema: e di queste anche se ne prevalse Brook Taylor per rinvenire i centri di oscillazione *nel Probl.* 24. *del suo Meth. Incrementorum Directa, & Inversa*, che fu dato in luce nel 1715. Sicchè nel principio di questo secolo vi erano tre Metodi diversi per isciorre un tal Problema, che tutti e tre erano di eleganti orditure, e consenzienti ne' risultati loro: imperciocchè egli è un carattere del Ve-

ro

po B, per le ragioni dianzi esposte, è uguale a $\frac{B\,n}{x}$, ch'è maggiore di B, natia forza motrice di tal corpo. Dunque l'acquisto di forza motrice, che si è fatto in tal corpo per l'influente azione del corpo A, dee essere $\frac{B\,n}{x} - B$. E quindi sarà $m\,A\,(x - m) : n\,x = (B\,n - B\,x) : x$. E risolvendo questa equazione verrà $x = (A\,m\,m + B\,n\,n) : (A\,m + B\,n)$. E questo è un saggio di quel

pre-

ro il farsi vedere della stessa forma da diversi lati. Ma quel più dee sorprendervi è, che in queste soluzioni di un Problema sì particolare, e ristretto stavano ascosi i germi di tre generalissimi Metodi, e potenti ad isnodare i più gran Problemi, che nella Statica, nella Meccanica, e nella Idrodinamica si propongono. In fatti nella soluzione Ugeniana si annidava il famoso *Principio della conservazion delle forze vive*: da quella di Giovanni Bernulli emerse il *Metodo di calcolare i moti de' corpi rigidi rotanti*: e finalmente dalla soluzione di Bernulli il vecchio è nata a dì nostri quella potentissima formola, con cui il Sommo Analista il Sig. Luigi de la Grange ha mostrato potersi risolvere ogni arduo Problema, che in dette Scienze può mai proporsi. Vedi *la Sua Mech. Analyt. Part. II.*

Nel decorso di questo secolo il Problema *del centro di oscillazione*, il quale fu mostrato identico a quello della percossa, ricevè dall'Ermanno, e dall'Eulero altre soluzioni alquanto diverse dalle divisate, che potrete apparare dalla *Foronomia* dell'Ermanno, e dal *Vol. VII. Att. Ant. Pietrob.*: mentre io ripigliando il racconto delle primiere soluzioni vo' indicarvi un'altra lite, che la *filauzia* de' Letterati seppe in tal rincontro

ecpreclarissimo metodo, che fu ritrovato da Giacomo Bernulli, e rettificato dal Marchese de l'Hospital per la sicura indagine de' centri di oscillazione.

§. 213. Scol. II. Colla guida della verità espostavi nel Cor. I. di questa Proposizione sarà agevol cosa determinare i centri di oscillazione nelle figure comunque oscillanti.

PROP.

eccitare. Il Sig. Giovanni Bernulli avendo osservato in quel Problema 24.^{mo} del Taylor le vestigia del suo metodo senza esserne stato encomiato qual Autore, se ne dolse nel Giornale di Lipsia del 1716., e vi punse il Taylor acremente, tacciandolo di *Plagio*. Il Taylor, ch'era un'acuto Geometra, ma da meno del Bernulli, si garantì da questa imputazione nel IV. *Vol. di un Diario detto Biblioth. Angl.*, e nell'Apologia, ch'ei scrisse nelle *Transaz. Anglic. del* 1719. Egli da principio rispose modestamente al Bernulli; ma poi vi mischiò delle parolette ontose. Sicchè Nicola Bernulli volendo il paterno onore reintegrare replicò al Taylor con contegno: e 'l Sig. Giovanni Borcardo accorrendo a patrocinare i Bernulli suoi compatriotti formò addosso del Taylor un grave processo di *Plagio*, e vi trascorse quella filosofica moderazione, che negli animi de' Sapienti è la nobiltà più rara e luminosa.

PROP. XXVIII. TEOR.

§. 214. *Il Centro di gravità del Sistema de' corpi* A, B, C, &c., *che in virtù de' loro pesi si son ridotti all' equilibrio, è sempre nella massima, o nella minima elevazione da un piano orizzontale* FH. Fig. 22.

Dim. Sia O il centro di nostra Terra, e P quello di gravità del Sistema de' corpi A, B, C, &c. i quali siensi transferiti ne' luoghi α, β, γ, &c., quando un picciol moto sia stato loro impresso: e 'l centro P del Sistema si sia nello stesso tempo trasportato in π. Si uniscano le rette OA, Oα, OB, Oβ, OC, Oγ, &c.: saranno le retticciuole Aa, Bb, γc, &c. gli spazietti di accesso (234 Mecc.) o di recesso de' corpi A, B, C, &c., e PV quello del centro del Sistema. Ciò posto, essendo pressochè infinita la distanza, che ha dal centro di nostra Terra l'Orizzonte FH, rispetto alla linea Ff; si potranno avere per uguali le rette OF, Of: dunque sarà $AF - \alpha f = OA - O\alpha = Aa$: e quindi $A.AF - A.\alpha f = A.Aa$. E dimostrando nello stesso modo, che sieno $B.BG - B.\beta g = B.Bb$, e $C.\gamma h - C.CH = C.\gamma c$ &c.; sarà $A.Aa + B.Bb + C.\gamma c$, &c. $= A.AF + B.BG + C.\gamma h +$ &c. $- A.\alpha f - B.\beta g - C.CH -$ &c. Ma i prodotti positivi, che scorgonsi nel

K 2.°

2.° membro di questa equazione, (195) sono uguali ad (A + B + C, &c.) P K, ed i negativi uguali ad (A + B + C + &c.)($-\pi$ k): e questi e quelli presi insieme fanno (A + B + C + &c.)(P K $-\pi$ k), cioè a dire (A + B + C + &c.) P V. Dunque sarà A. A a + B. B b + C. γ c + &c. = (A + B + C + &c.) PV: e quindi il secondo membro di questa Equazione sarà zero, come lo è il primo (236 Mec.): e dovrà esser zero la P V, ch' è lo spazietto di accesso, o di recesso del centro P del Sistema. Ma quando il differenziale di una grandezza variabile divien zero, ella dee essere nel massimo, o nel minimo grado (*a*). Dunque la P K elevazione del centro del Sistema dall' orizzonte F H dovrà essere massimà, o minima, quando i corpi in virtù de' proprj pesi siensi ridotti all' equilibrio. C. B. D.

§. 215.

(a) Qualora una funzione di grandezze variabili è nel massimo o nel minimo grado, il di lei differenziale è sempre zero. Ma non è sempre giusta la Proposizion conversa, che se questo differenziale sia zero, quella espressione debba essere un Massimo, o un Minimo: poichè può addivenire (es. gr.) che sia costante il valore dell'espressione, e quindi zero il di lei differenziale. In fatti, come diceva Eulero, nel circolo del raggio r, ove l' equazione definiente la sua natura è x x + y y = r r sempre n'emerge D. (x x + y y) = o; e pure l' espressione (x x + y y) non è un Massimo, nè un Minimo. Ma non per tanto queste cose, non essendo applicabili al nostro Teorema, non ne dimezzano la verità di esso.

§. 215. Scol. Il centro di gravità de' corpi, che reggonsi in equilibrio fermo (8), è sempre nella minima elevazione da un sottoposto piano orizzontale: e n' è poi nella massima elevazione il centro di quegli altri, che sostengonsi in equilibrio labile. Così (per indicarvelo con qualch' esemplo) prendete un cono retto, che sia di materia dura ed omogenea, e ponetelo colla sua base su di un fermo piano orizzontale. Egli dovrà serbarvi un' equilibrio stabile, e 'l suo centro di gravità starà elevato da quel piano per $\frac{1}{4}$ dell' altezza, o dell' asse dello stesso cono (201): e si farà maggiore cotesta elevazione, se alquanto lo scuoterete. Ma se vi riesca di farvi reggere il cono sul piano colla sua base in alto, e col vertice all' ingiù: ei dovrà tenervi un equilibrio labile, e 'l centro di gravità del cono si troverà erto su quel piano all' altezza di $\frac{3}{4}$ dell' asse del cono, vale a dire più di prima: ed esso centro verrà a deprimersi, sol che scuoterete un poco lo stesso cono.

Similmente *se con delle corde ritengasi pensile un gran peso, il vedrete oscillare da principio, ma ridotto all' equilibrio avrà il suo centro di gravità basso quanto più può esserlo.* La qual cosa dovrà esservi come sicurissimo principio, onde determinare il sito, che prenderà questo corpo, quando siasi fermato. Vedi la Grange *Mech. analyt. Par. I. pag.* 37.

CAP. IX.

Soluzione di due problemi sulle spinte, che ricevon le mura da que' gravi, che vi appoggiano.

PROP. XXIX. TEOR.

§. 216. *La Verga rigida AB, ch' è gravata in C del peso P, sia fortemente ritenuta nel suo estremo inferiore B, e coll' estremo superiore si appoggi al muro AD inclinandovisi sotto l' angolo BAD = ϕ, che stia in un piano verticale; dico esser la Spinta Orizzontale, ch' ella ne fa sul muro, al peso P, come il seno di 2 ϕ al raggio, e come la metà del segmento inferiore BC della Verga all' intera lunghezza di essa.*

Fig. 25.

Dim. La retta verticale CF esprima il peso del corpo P: e, calata dal punto F la FQ perpendicolare alla verga AB, si compia il parallelogrammo CQFR. All' estremo superiore della Verga le si eriga la perpendicolare AM quarta proporzionale in ordine alle rette BA, BC, ed al lato CR del riferito parallelogrammo: e la stessa AM

AM stia nel piano verticale ADB condotto per le due rette AB, CF. E finalmente abbassata da M la MN perpendicolare al muro AD, e quindi alla verticale condotta per A, si compia il parallelogrammo MNAG.

Ciò premesso, la forza CF, ond' è gravata la verga in C, equivale alle due forze CQ, CR (212 Mec:). Ma la prima di queste n' è interamente distrutta dall' invincibile ritegno B. Dunque l' altra CR cercherà d' aggirar la verga intorno a B: e 'l momento, che avrà questa forza in A, sarà quanto AM: conciosiachè si è presa AM : CR :: BC : BA. (81). E risolvendo la forza AM nelle laterali AN, AG, di cui la prima distruggesi interamente, perchè esercitata per una direzione verticale sul muro AD; dovrà l' altra forza GA rappresentare quella spinta orizzontale, che fa la verga sul muro.

Or i triangoli GAM, CFR sono simili al triangolo DAB, come scorgesi chiaramente; e sono tra se uguali i loro angoli GAM, CFR, BAD. Dunque starà GA : AM :: cos. ϕ : 1. Ma è per costruzione AM : CR :: BC : BA, ed è poi CR : CF :: sen. ϕ : 1. Dunque sarà *ex æquo* GA : CF :: (cos. ϕ : 1) (BC : BA) (sen. ϕ : 1): cioè GA : GF :: (2 cos. ϕ. sen. ϕ : 1) ($\frac{1}{2}$ BC : BA). Val quanto dire la spinta orizzontale, che fa la verga sul muro, sta al peso P, di cui n' è gravata, come il

K 3 seno

seno del doppio angolo (a) BAD al raggio, e come la metà del segmento inferiore BC della verga all' intera di lei lunghezza. C.B.D.

§.217. Cor.I. Ponghansi $AB = a$, e $CB = b$: si chiami P il peso, che pende da C, ed S la spinta orizzontale, che fa la verga sul muro AD; sarà $S : P :: (\text{sen. } 2\varphi : 1)(\frac{1}{2}b : a)$. E quindi sarà $S = (b\,P.\,\text{sen. } 2\,\varphi) : 2\,a$

§. 218. Cor. II. E *questa verga farà la massima spinta sul muro, quando l' angolo* BAD *sia di* 45°. Imperciocchè in tal caso è $\text{sen.}2\,\varphi = \text{sen. } 90° = 1$, ch'è il massimo seno. E sarà in tal caso la spinta $S = (b\,P) : 2\,a$

§. 219. Cor. III. Si prolunghi AB in O, tantochè BO adegui CQ, e calata la retta OK perpendicolare su di DB si compia il rettangolo BKOL. Sarà la forza CQ, o la BO equivalente alle due BK, BL. Laonde se DB rappresenti un piano orizzontale fermo, ed immobile, che sia potente ad elidere la forza BL esercitata perpendicolarmente contro ad esso, vi resterà l'altra forza BK, ch'è la spinta orizzontale esercitata dalla verga contro al ritegno B.

(a) Per intender la ragione, onde sia $2.\cos.\varphi.\,\text{sen.}\,\varphi = \text{sen.}\,2\,\varphi$, facciasi nel punto A della DA l'angolo DAT uguale a DAB, cioè a φ: e prodotta la EA, sinchè incontri in T la BD prorratta, si meni BE perpendicolare su di AT. Saranno per la 26. El. I. i triangoli ABD, ADT uguali fra loro, e per la 4. El. VI. sarà il triangolo BET simile ad ADT, o al di lui uguale ABD: onde starà AB ad AD, come BT a BE. Or prendendo BA per raggio, e con ciò uguale ad 1, BD è seno di BAD, ed AD n'è il coseno: e poi la BE è il seno di BAE, cioè di $2\,\varphi$. Dunque sarà $1 : \cos.\varphi :: 2.\,\text{sen.}\,\varphi : \text{sen.}\,2\,\varphi$: e quindi sarà $2.\cos.\varphi.\,\text{sen.}\,\varphi = \text{sen.}2\,\varphi$

§. 220. Cor. IV. E poichè sta BK a BO, come sen. di BOK al raggio, cioè come $\text{sen.}\,\varphi$ ad 1. Ed è poi BO, o CQ a CF come cos. FCQ al raggio, cioè come $\cos.\varphi$ ad 1; sarà *ex æquo* BK a CF come $\text{sen.}\,\varphi.\cos.\varphi$ ad 1. E quindi chiamando s questa spinta orizzontale, che fassi dalla verga contro al ritegno B; sarà $s : P :: \text{sen.}\,\varphi.\,\cos.\,\varphi : 1$, ed $s = P.\,\text{sen.}\,\varphi.\,\cos.\,\varphi = (P.\,\text{sen.}\,2\,\varphi) : 2$

§. 221. Cor. V. Dunque le spinte S, ed s respettivamente uguagliano $(b\,P.\text{sen.}2\,\varphi) : 2\,a$, e $(P.\,\text{sen.}\,2\,\varphi) : 2$. E con ciò starà $S : s :: b : a$

§. 222. Cor. VI. Di quì si possono raccorre molte verità particolari, le quali non si limitano ad una vana, e sterile speculazione, anzi ne fanno intendere per iscienza, di che valore sieno le spinte orizzontali fatte da certi corpi appoggiati a' muri, (come sono i Tetti degli Edifizj, i Puntelli delle pareti rovinanti, ed altri simili corpi), e quanto le loro pressioni verticali. In fatti sia AB la lunghezza di una trave prismatica, ed omogenea, sicchè il di lei centro di gravità stia in mezzo ad AB: sarà $AC = CB$, cioè $b = \frac{1}{2}a$: e detto P il di lei peso, e φ l' an-

angolo, ond' ella appoggisi ad un vicino muro, sarà pe 'l Corol. I. $S = (\frac{1}{2} a\, P. sen. 2\varphi) : 2a = \frac{P. sen. 2\varphi.}{4}$ cioè

§. 223. Teor. *Se una Trave prismatica, ed omogènea sia fortemente ritenuta nel suo estremo inferiore, e col superiore si appoggi ad un vicino muro; la spinta orizzontale, che farà sul muro cotesta Trave, sarà una quarta parte del di lei peso moltiplicata per lo seno del doppio angolo dell' inclinazione al muro. E la massima spinta orizzontale, ch' ella può far sul muro (lo che si verifica, quando l' angolo d' inclinazione sia di 45°), sarà un quarto di quel Peso.*

§. 224. Cor. VII. Da questi Principj potrà sicuramente calcolarsi la consistenza de' Tetti, qualunque siane la loro figura, e grandezza, e valutarsi quella forza, ond' essi ne spingono le respettive imposte del piè diritto.

PROP.

PROP. XXX. TEOR.

§. 225. *Sia A C B una qualunque Leva angolare; che in virtù del peso P pendente dal suo angolo mantengasi in sito verticale tra 'l muro A L, e 'l ritegno B; dico essere uguali le spinte orizzontali, ch' ella fa contro al muro, ed al ritegno.* Fig. 26.

E che il Peso P stia a ciascuna di queste spinte, come il seno dell' angolo della Leva al prodotto de' seni degli angoli, che fanno le braccia della Leva colla direzion del Peso.

Dim. La retta CF dinoti la gravità del corpo P, e condotte per F le due FH, FK respettivamente parallele alle braccia CA, CB della data leva, si prolunghino le stesse CA, CB in T, ed O, sinchè AT, e BO sieno respettivamente uguali a CK, e CH. E finalmente pe' punti T, ed O si tirino le rette verticali TR, OM, che incontrino in R ed M le orizzontali RAV, LBM distese per gli estremi A, e B della data Leva.

E poichè CF sta a CK, o alla dilei uguale AT, come il seno dell' angolo KCH al seno dell' altro FCH (212. Mec.): ed è poi AT ad AR come il raggio, che si uguagli ad 1, al seno dell' angolo ATR, o del di lui

al-

alterno FCK; sarà *ex æquo* CF ad AR, come il seno di KCH al prodotto de' seni degli angoli FCH, FCK. E dimostrando nello stesso modo, che CF stia a BM, come il seno dell'angolo KCH al prodotto de' seni degli angoli FCK, FCH; sarà CF : AR : : CF : BM, e quindi AR uguale a BM.

Si compia il parallelogrammo ARTS. E poichè la forza CF (212) equivale alle due CK, CH; la Leva spingerà nel punto A il piano AL con una forza proporzionale a CK, o ad AT. Dunque, risolvendo questa forza nelle sue laterali AS, AR, la AR dinoterà la spinta orizzontale per AR, che la Leva gravata dal peso P fa sul piano AL: imperciocchè la prima forza AS n'è interamente distrutta dalla fermezza del muro AL, contro al quale ella agisce verticalmente. E con simil ragionamento si verrà a concludere, che sia BM la spinta orizzontale, che vi fa contro al ritegno B l'altro braccio CB della Leva. Ma qui sopra si è dimostrato, che stia CF tanto ad AR, che a BM, come il seno di ACB al prodotto de' seni degli angoli FCH, FCK. Dunque le divisate spinte saranno uguali, e'l peso del corpo P starà a ciascuna di esse, come il seno dell'angolo della Leva al prodotto de' seni degli angoli, che fanno le di lei braccia colla direzion del Peso. C. B. D.

§. 226.

§.226. Cor. Si chiami ϕ l'angolo CAV, e θ l'altro CBL, o il suo uguale CVA; sarà l'angolo esterno ACN, che ne pareggia i due CAV, CVA del triangolo ACV, uguale a $\phi + \theta$; e'l seno di KCH, ch'è quanto quello del suo conseguente ACN, sarà uguale a sen. $(\phi + \theta)$. Di più essendo l'angolo ACQ complemento dell'altro CAQ, sarà il seno di ACQ uguale a cos. ϕ: e per la stessa ragione sarà anche il seno di HCF uguale a cos. θ. Dunque se la forza CF si chiami P, sarà P : AR : : sen. $(\phi + \theta)$: cos. ϕ. cos. θ: e quindi AR, o la sua uguale BM sarà P (cos. ϕ. cos. θ) : sen. $(\phi + \theta)$.

§. 227. Scol. Da questi Principj il Sig. Nicolò Fuss (a) ha saputo calcolare le forze, e'l sito, onde sostiensi una compage di travi attaccate ne' loro estremi, sicchè formino un mezzo poligono posto in sito verticale, e cogli angoli all'ingiù rivolti.

CAP.

(a) Vedi il *Vol. di Pietrob. per l'an.* 1778., ove leggesi una Dissertazione di questo Geometra, che ha per titolo, *Invenire vires, quas in anterides exerit compages ex quotcumque trabibus confecta*.

CAP. X.

Della Frattura delle Travi, e delle Colonne.

§. 228. In questo Capitolo piacemi ragionarvi della Frattura delle Travi, e delle Colonne, e del modo di calcolarne la loro consistenza; affinchè in pratica sappiate valutare la stabilità delle Compagi di quelle, e degli Edifizj, che reggon su di queste. Io m' immagino, che talora avrete osservato frangersi una Trave fitta orizzontalmente in un muro, dal di cui estremo pendeva gran peso: e che avrete udito dire essersi rotta una Colonna gravata da smisurato peso. Or io vi aggiungo, che amendue questi corpi avrebbonsi potuto rompere per lo proprio loro peso, sol che fossero stati di eccedenti lunghezze: e che una Colonna ritta, e d' insigne altezza può anche frangersi per lo proprio peso, tuttochè ella sia rigidissima, nè abbia altro corpo, che la gravi. Dunque è di bene, ch' io vi dichiari i Principj di questa Teorìa, e che vi mostri come guidarli nella soluzione di alcuni Problemi, che vi si soglion proporre.

§. 229. Princ. I. *Quando frangesi una Trave fitta saldamente in un muro, e gravata da soverchio peso; le sue fibre, cioè que' suoi filamenti, che vi stan per lungo, han dovuto aver la massima distensione nell' istante antecedente alla frattura*. Cioè a dire *non può succeder frattura nel legno, senza la distrazione delle di lui fibre*.

§. 230. Dalle accuratissime sperienze del Mariotte, e da' di lui ragionamenti raccogliesi, che non solo i legni, ma i metalli ancora, e 'l più rigido vetro non possano frangersi, se prima non si distraggano le loro fibre, tese per l' azion de' corpi, che li premono, o gli stiran per dritto.

§. 231. Princ. II. *La forza, che induce la frattura in una Trave, dicesi* svellente, *se la sua direzione sia parallela alle divisate fibre. E si chiama* forza rompente *quella, che frange una Trave di traverso, premendola per una direzione perpendicolare, o inclinata ad esse fibre. La massima renitenza, che fa poi la Trave alla frattura, dicesi nel I.° caso* Resistenza Assoluta, *e nell' altro* Relativa.

§. 232. La Resistenza assoluta di un solido si misura da quel peso, che, posto nell' estremità di esso solido fitto per di sopra in una volta, vale a spezzarlo.

§. 233. Princ. III. *Nello svellimento di una Trave frangonsi quasi in un istante le di lei fibre,*

bre, dopo di aver sofferto insieme la massima distensione, di che son capaci. Ma quando ella si rompe, cioè si frange di traverso, si spezzan prima le sue fibre più tese, e poi le altre successivamente.

§. 234. Il Gran Galilei suppose, che in un solo istante si strappino le fibre di quel Solido, che frangesi di traverso. Il Mariotte, il Leibnitz, e'l Varignonio ammaestrati dalla sperienza stabilirono, che prima di rompersi una Trave vi si debbano distendere le di lei fibre con forze proporzionali alle loro distanze dal centro di moto. E Giacomo Bernulli non pago di queste supposizioni vi aggiunse, che al rompersi di una Trave, alcune di lei fibre vicino al centro di moto debbansi comprimere, e distender le più rimote. Ma la seconda di questa Ipotesi mi sembra più verisimile delle altre, ed è stata anche seguita dall' Eulero in una Memoria dell' Acc. di Pietrob. dell'anno 1776.

§. 235. PRINC. IV. *La tensione di una fibra, e con ciò la di lei forza di contrarsi, è proporzionale all' allungamento, che se l'è recata.*

§. 236.

(a) La Teorìa delle Resistenze de' Solidi nacque in Italia dalla mente del Galilei, e crebbe per le speculazioni, ed esperienze, che poi vi fecero Vincenzo Viviani, l' Ab. Grandi, Mariotte, Leibnitz, il Marchese Poleni, Alessandro Marchetti, Varignonio, Musschembroek, Giacomo Bernulli, ed Eulero.

§. 136. Quest' Ipotesi, ch'è assai plausibile, fu rigidamente dimostrata da Giacomo Bernulli in una Dissertazione, ch'è nelle Mem. dell' Acc. delle Scien. dell' an. 1705.

§. 237. PRINC. V. *Qualora una verga rettilinea saldamente fitta in un muro siasi incurvata per l' azion di un Peso, che penda dal suo estremo; il momento della pressione di ciascun suo elemento è proporzionale alla di lui distanza dalla direzion del Peso.*

§. 238. Rappresenti ACB una verga elastica, ed ugualmente grossa, che in A sia fitta saldamente nel muro, ed in B aggravata dal peso P, onde da rettilinea, ch' ella era, s' incurvi. Dal punto B, da cui pende il peso P, si cali sul muro la perpendicolare BL: e'l piano verticale PBL intendasi disteso al di sopra della BA, onde si formi in essa verga l'armilla AaBb terminata dalla curva interiore Ab, e dalla esteriore aB. Inoltre sia ET la costante grossezza della verga: e presi nella curva Ab gli uguali elementi Ee, Cc, da' punti E, C si calino Ek, Ch perpendicolari alla direzione PBk del peso P. La parte TEbB della verga potrà considerarsi come una leva angolare, di cui ET sia uno braccio diritto, ed EB un'altro curvo: e quindi il momento di pressione, che fa il peso P nel punto E, sarà il prodotto di P in Ek: ed in C un simil momento sarà P in Ch. *Fig.28.*

Dun-

Dunque i momenti della pressione, che ne incurvano gli elementi E e, C c della verga, saranno come P. E k, e P. C h, cioè nella ragione di E k, e C h, loro distanze dalla direzion del peso P.

§. 239. PRINC. VI. *Lo sforzo, che fa di raddrizzarsi ciascun elemento di essa verga, è nella ragion diretta della di lui rigidezza, e nell' inversa del raggio della di lui curvatura.*

§. 240. Agli estremi degli archetti minimi, ed uguali C c, E e, si conducano i raggi osculatori R C, R c, S E, S e: ed a' punti C, ed E si tirino le tangenti C F, E G, che incontrino in F, e G i raggi R c, S e prodotti. Sarà il triangoletto R C F rettangolo in C, e l'archetto C c potrà aversi come una perpendicolare calata dal suo angolo retto sull' ipotenusa R F. Dunque (8. El. VI.) sarà R c : C c : : c C : c F, e quindi $Cc^2 = Rc . cF$. E dimostrando in simil guisa essere $Ee^2 = Se . eG$, saranno R c . c F, ed S e . e G uguali fra loro, come si son supposti uguali gli archetti C c, E e. Laonde dovrà stare R c : S e : : e G : c F. Per la qual cosa chiamando R ed r le rispettive rigidezze degli elementi C c, E e; saranno gli sforzi, ch' essi fanno a raddrizzarsi, come le loro natìe rigidezze (*a*) R, ed r, e come le distor-

stor-

(a) Quanto è più rigido l' elemento di una verga incurvata tanto più ei cerca di raddrizzarsi: e questo sforzo è anche come il distorcimento, che ha sofferto lo stesso elemento dal sito naturale.

in-

storsioni c F, e G, che vi soffrono: cioè come R ad r, e come S e ad R c. Val quanto dire tali sforzi saranno direttamente come le rigidezze degli elementi della verga, ed inversamente come i raggi delle curvature di essi.

§. 241. COR. I. Or i momenti di pressione, che il peso P ne arreca agli elementi C c, E e della verga, sono le cagioni adeguate, per cui questi si distorcono, e poi si sforzano di raddrizzarsi: dunque saranno que' momenti come questi sforzi. Ma que' momenti mostraronsi proporzionali a C h, ed E k: e questi sforzi si son dimostrati essere direttamente come le rigidezze degli archetti C c, E e, ed inversamente come i loro raggi osculatori R c, S e. Dunque sarà C h : E k : : (R : r) (S e : R c).

§. 242. COR. II. Cioè *il momento del peso, che produce l' incurvazione in un elemento di tal verga, o in un altro solido, che siasi piegato in simil guisa, è quanto la rigidezza di esso elemento divisa pe 'l di lui raggio osculatore.*

§. 243. PRINC. V. *Una Colonna ritta, tuttochè sia rigidissima, non può mai frangersi per un gran peso, che le sovrasti, se prima non s' incurvi. E questa incurvazione non è, che insensibile.*

L §. 244.

§. 244. Queste due speculazioni sono del Sommo Eulero, e nel *Vol. II. de' Nuov. Att. di Piet.* leggonsi tre di lui eleganti Dissertazioni su questo argomento.

PROP. XXXI. PROBL.

Fig. 27. §. 245. *Data una Trave fitta saldamente a squadra in un muro, valutarne la sua Resistenza Relativa.*

Soluz. I.° Immaginatevi essere un parallelepipedo rettangolo cotesta Trave, e che sia fitta a squadra in un muro; ma in modo, che di essa due piani opposti si trovino in sito orizzontale. Di più supponetela priva di gravità nelle sue parti, e che presa nella sua lunghezza C F la C O uguale alla sua grossezza C B, si applichi in O il peso R capace di farla piegar giù nel sito C B E F, ove le sue fibre superiori, come le A B, &c., avendo sofferta la massima distensione sien presso a frangersi. Sarà manifesto, che la Trave debba esser ritenuta in un tal sito declive per la forza, che han di contrarsi le fibre A B, P D, p d, &c. diversamente allungate, e tese: e che da queste ella ne sia preservata dal frangimento. Dunque (231) l'aggregato de' momenti di queste forze sarà la resistenza relativa di essa Trave.

II.° Intendasi divisa cotesta Trave con un piano verticale, che sia perpendicolare alla faccia del muro, ov' ella n' è fitta a squadra: e che il rettangolo C B E F sia la sezione nata in questo solido, e la retta C A nella superficie del muro. La B A dinoti la suprema fibra della sezione C B E F, e le altre due inferiori P D, p d sieno vicinissime fra loro. Dal punto C si elevi la C L perpendicolare a C A, giacente nel piano A C F: di poi col vertice principale C, coll' asse C L, e col parametro C A si descriva la parabola conica C N G. E finalmente, distesa per A la retta A G parallela a C L, e compito il parallelogrammo C A G L, si conducano per P, e p le P H, p h parallele alla stessa C L.

III.° Ciò premesso, le forze, che han di contrarsi le fibre A B, P D, (235) sono come le loro distensioni A B, P D: ed i momenti di esse forze intorno a C, ove fa (81) leva la stessa Trave, saranno come (AB : PD) (CB : CD), cioè come CA^2 a CP^2, (essendo ciascuna di quelle due *ragioni semplici* uguale alla stessa ragione di C A a C P), o finalmente come A G a P N (*a*). Dunque la forza, onde la fibra A B ritiene la Trave, e la preserva dal frangimento, sta ad una consimil forza, che vi pratica l'altra fibra P D, come A G, o P H a P N.

 IV.°

(a) Prop. 7. Lib. I. Con. Gian.

IV.° Or supposto, che una forza applicata a svellere dal muro cotesta Trave, ne avesse distese le di lei fibre, quanto la B A (lo che deesi verificare quando esse strappate per dritto son vicino a frangersi tutte in un colpo); ognuna di loro dee resistere al divellimento, quanto la B A, e quindi con forza proporzionale a P H. Dunque la forza, che la fibra P D oppone al suo divellimento, è alla forza, con cui resiste ad esser rotta di traverso, come P H a P N: e le divisate forze, che hanno le fibre dell' elemento P p, saranno tra di loro come il rettangoletto P p h H all' altro P p n N. Dunque la massima renitenza, che fanno le fibre dell' intera A C ad esser divulse, è alla massima loro renitenza nell' esser rotte di traverso, come il rettangolo A C L G al trilineo parabolico A C G, cioè come 3 ad 1 (*a*). E dimostrando con simil ragionamento lo stesso addivenirne alle altre sezioni della Trave, potrà concludersi essere come 3 ad 1 la di lei resistenza assoluta alla relativa (231). C. B. D.

§. 246. Cor. I. Suppongasi il peso R posto nell' estremità F della Trave; sarà il momento, ch' egli esercita in questo luogo, al momento che aveva in O, come la C F alla C O, o alla di lei uguale C B.

§. 247.

(a) Prop. 23. Lib. I. Con. Gian.

§. 247. Cor. II. Dicasi p la Resistenza assoluta di questa Trave (232), e si prenda il peso r, che stia all' altro R come la C B grossezza della Trave alla di lei lunghezza C F: e poi si supponga tolto dal luogo O il peso R, e posto in sua vece l' altro r nell' estremo F della Trave. Sarà il momento, che dovrà in F esercitare il peso r, uguale a quello, che nel punto O vi faceva (81) R. E poichè sta r : R :: C B : C F, e si è anteriormente dimostrato esserne R : p :: 1 : 3; sarà *ex æquo* r : p :: C B : 3 C F :: $\frac{1}{3}$ C B : C F.

§. 248. Cor. III. Cioè *il peso, che applicato all' estremo di questa Trave vale a frangerla di traverso, sta a quello, che la divelle tirandola dirittamente, come un terzo della grossezza della Trave alla di lei lunghezza.*

§. 249. Cor. IV. E volendosi mettere in conto la gravità della Trave, che qui per semplicità si è omessa, dovremo al peso r aggiunger la metà del peso della stessa Trave (197, 81.): e quindi modificarne simili ricerche, ed espressioni.

§. 250. Cor. V. E di quì può intendersi, onde avvenga, che un prisma più largo, che grosso resista più ad esser rotto, fattogli forza secondo la sua larghezza, che secondo la grossezza: onde ne abbisogni più forza a romperlo per taglio, che per piatto.

L 3 Al-

Altra Soluzione dello stesso Problema.

§. 251. Premesse tutte quelle cose, che ho dichiarate nel I. §. della precedente soluzione, eccovene un' altra più agevole di essa. Nella retta A G prendasi K A, che dinoti la renitenza opposta dalla fibra A B alla frattura: ed unita la C K si distendano P N, p n, sinchè l' incontrino in Q, e q. Sarà P Q il grado di tensione della fibra P D, e con ciò la di lei resistenza al divellimento della Trave: imperocchè ritrovandosi le A K, e P Q proporzionali alle rette C A, C P, o alle distensioni delle fibre A B, P D; siccome A K dinota la tensione della suprema fibra A B, così P Q dovrà esprimer la tensione della sottoposta P D. E sarà il momento, ch' esercita la stessa fibra P D a ritirar la Trave B C F E volubile intorno a C, proporzionale (81) al rettangolo di C P in P Q. Or poichè il rettangolo di C P in P Q sta a CP^2, come P Q a P C, o come A K ad A C, o come A K in N P ad A C in N P: ed è poi per la natura della Parabola C A G il quadrato di C P uguale al rettangolo di A C in N P; sarà pure C P in P Q uguale ad A K in N P. Dunque il detto momento della fibra P D sarà espresso dal rettangolo di A K in N P: un simil momento delle fibre attaccate alla retticciuola P p sarà dinotato da A K moltiplicata per lo rettangoletto P p n N: e 'l momento

to

to totale, con cui resistono alla frattura tutte le fibre attaccate all' intera A C, sarà come A K moltiplicata per lo trilineo parabolico C A G, cioè (*a*) come A K. $\frac{1}{3}$ C A^2. C. B. D.

§. 252. Cor. I. Se dicasi c la larghezza di questa Trave, cioè quella di lei dimensione, ch' è orizzontale, e g la grossezza di essa, che dee essere verticale: e poi per T esprimasi la massima resistenza, che oppone alla frattura ciascuna fibra di questo solido; sarà $\frac{1}{3}$ T c g^2 *la Resistenza relativa di essa Trave*.

§. 253. Cor. II. Con che se due Travi M, ed m di materia similare abbiano le larghezze C, e c, e le grossezze G, e g, e sieno fitte in simil guisa in un muro; le loro resistenze relative saranno respettivamente uguali ad $\frac{1}{3}$ T C G^2, ed $\frac{1}{3}$ T c g^2: e quindi sarà la resistenza relativa della Trave M, a quella dell'altra m, come C G^2 a c g^2.

§. 254. Cor. III. Laonde date le dimensioni di un modello di un Ponte, o di un' altro solido, e dato quel massimo peso, che lo stesso modello può sostenere senza frangersi; potrà con questi principj calcolarsi la stabilità del Ponte, e la forza, che lo preserva dalla frattura (*b*).

L 4 §. 255.

(a) Prop. 23. Lib. I. Con. Giann.
(b) Nel *Vol. XX. de' Nuov. Comm. dell' Acc. di Pie-*

§. 255. Scol. Se lo strappamento delle fibre facciasi in un tratto, come addiviene a' corpi perfettamente rigidi, e come credeva il Galilei succederne a tutti i solidi; sarà il momento di quella forza, che fa ciascuna fibra di un solido all' esser rotta di traverso, come la distanza di essa fibra dal centro di moto del solido. E calcolando con questa supposizione le resistenze relative di due Solidi M, ed m, i quali suppongansi essere parallelepipedi simili, fatti di una stessa materia, ed aventi le grossezze G, e g, e le larghezze C, e c; saranno esse resistenze respettivamente uguali ad $\frac{1}{2}$TCG, ed $\frac{1}{2}$Tcg, e quindi nella ragione di CG a cg. E poichè per la similitudine di questi solidi, di cui M ne sia il maggiore, sta M : m : : C^3 : c^3, e CG : cg : : C^2 : c^2; sarà M ad m in maggior ragione di CG a cg, come la ragione di C^3 a c^3 è maggiore di quella di C^2 a c^2. Dunque non è vero quel giudizio, che naturalmente entro di noi emerge, *esser le resistenze de' solidi simili, massime se sieno rigidi, proporzionali alle magnitudini loro*. Che anzi, come di quì si raccoglie, *i maggiori sono di meno consistenza de' minori*: onde non solo l' Arte, ma la Natura stessa non può crescer le sue Macchine a vastità immensa, serbandovi un' identico tenore di robustezza. E siccome riesce impossibile agli uomini fabbricar Navilj, Palazzi, Templi, vastissimi, li cui remi, alberi, antenne, travamenti, colonne, catene di ferro, ed in somma altre loro parti consistessero; così Natura non può far alberi di smisurata mole: poichè i rami loro avendo meno resistenza, che gravezza si fiaccherebbero. Nè può ella dare ad un uomo una compage delle nostre ossa consistenti, ed atte alle funzioni della di lui vita, quando il facesse crescere il triplo, il quadruplo, il quintuplo, &c. di quel che ora siamo.

Pietrob. leggesi una Dissert. di Eulero col seguente titolo, *regula facilis pro diiudicanda firmitate pontis, aliusve corporis similis, ex cognita firmitate moduli*.

PROP. XXXII. PROBL.

§. 256. *Ritrovar la Resistenza relativa di un qualunque solido prismatico, che sia fitto a squadra in un muro.*

Sol. Sia ABCLED un qualunque prisma, cioè che le sue basi BCD, ALE sien due qualunque rettilinei, o curvilinei perpendicolarmente insistenti sul piano ABDE: ed ei s' intenda fitto saldamente nel muro PQ, ed in modo che il piano ABDE stia in sito orizzontale. Prendasi nella BD una parte infinitesima Nn, dagli estremi della quale conducansi nel piano BCD le rette verticali NC, nc: e poi tagliate le AM, ed Fig. 29.

Mm

M m respettivamente uguali alle BN, ed Nn si compia il parallelepipedo NCclLM. Sarà (252) la resistenza relativa di questo solido uguale a $\frac{T.\,Nn.\,NC^2}{3}$. Laonde ponendo $BN = x$, $NC = X$, e con ciò $Nn = dx$; sarà la Resistenza relativa del picciol parallelepipedo NCclLM uguale a $\frac{TX^2dx}{3}$: e quella del solido BCLMA uguale a $\int\frac{TX^2dx}{3}$. Intanto sappiasi per esperienza esser P il minimo di que' pesi, che stirando per diritto un cilindro omogeneo ad ABCDE vagano a frangerlo (*a*); sarà l'azione del peso P quanto la somma delle tensioni di tutte quelle fibre del cilindro, che fan capo nella di lui base, che si chiami B: cioè uguale a T moltiplicata

cata per B. Dunque sarà $P = TB$, e $T = P:B$. E quindi la resistenza relativa del solido BCLMA, ch'erasi mostrata uguale a $\int\frac{TX^2dx}{3}$, sarà $P\int X^2dx : 3B$. Laonde, se colle regole de' Metodi sommatorj s'integri cotesta espressione, avrassi la resistenza relativa della parte indeterminata BCLMA del proposto solido: e quindi ancor quella dell'intero solido. C.B.F.

§. 257. Scol. I. Questa semplicissima formola è applicabile ad infiniti casi, e ferace di

(a) Da quelle replicate sperienze, che fece l'accuratissimo Musschembroek con una Macchina *Divulsoria*, rilevansi le coerenze di varj legni, e di varj metalli, di cui eccovene una brieve Tavola.

I. Parallelepipedi di legno, ciascuno de' quali aveva la grossezza di o, 27 poll. Renani, furono strappati da' seguenti pesi, cioè

Legno	*strappato*	*Legno*	*strapp.*
di Teglia	da lib. 1000	di Picea	da lib. 550
di Alno	da lib. 1000	d'Abete	da lib. 600
di Faggio	da lib. 1250	di Olmo	da lib. 950
di Frassino	da lib. 1250	di Quercia	da lib. 1150.

II. Fili cilindrici di metallo, ciascuno de' quali era di diametro o, 1 poll. Renani, furono strappati da' seguenti pesi: cioè

Filo	*strappato*	*Filo*	*strapp.*
di Piombo	da lib. 29. 25	di Ottone	da lib. 360
di Stagno	da lib. 49. 25	di Argento	da lib. 370
di Rame	da lib. 299. 25	di Ferro	da lib. 450
		di Oro	da lib. 500.

III. Corde di Canapa, (ciascuna delle quali era ritorta da sei funicelle) avevano le segnenti circonferenze, e furon rotte da corrispondenti pesi:

Fune della circonferenza	*sostenne*
di 2. linee Ren.	lib. 92
di o, 4. poll. Ren.	lib. 160
di o, 54. poll. Ren.	lib. 240.

Dove vuol osservarsi, che le coerenze delle corde sono in minor ragione delle loro grossezze: e che tutti i fili diventino più deboli, quando sieno ritorti.

IV.

di moltissime conclusioni attenenti alla resistenza de' solidi. Io quì le tralascio tutte: perciocchè in questo Capitolo mi son proposto di stabilire nel vostro spirito i principj di tali Teorie, e non già di andarmene per le conseguenze loro spaziando.

§. 258. Scol. II. Su questo argomento si suol proporre un'altro insigne, ed utile Problema, ed è, *dato un solido retto fra due sostegni ne' suoi termini, calcolarne la resistenza re-*

IV. Bastoni di quercia, ognuno de' quali era di una data lunghezza, della larghezza di 0, 26. poll., e della grossezza, che quaggiù rapporto, si adattarono orizzontalmente su due sostegni, e furono spezzati dagl'infrascritti pesi: cioè

Bastoni delle gross.	0, 33.	0, 40.	0, 52.	0, 58.	0, 68
Rotti da libbre	$13\frac{1}{2}$.	$23\frac{1}{2}$.	$31\frac{1}{2}$.	$32\frac{1}{2}$.	50

V. Più Travicelli di quercia, ciascuno de' quali aveva la base quadrata di 0, 23. poll. quad., furono impiantati verticalmente, e gravati da' pesi, che quaggiù veggonsi rimpetto alle loro lunghezze, e ne furono da questi spezzati in mezzo: cioè

Lunghezz. del Trav.	*Rotto*
di 18 poll.	da lib. 23
di 9 poll.	da lib. 118
di 8 poll.	da lib. 185.

Dunque in questi Travicelli di ugual grossezza le resistenze ad essere spezzati per compressione sono in duplicata ragion inversa delle lunghezze loro.

Il piè Renano sta al Parigino, come 1000. a 1034.

relativa delle sue sezioni verticali, e parallele alla sua base (a).

PROP. XXXIII. PROBL.

§. 259. *Qualunque sia la figura di un solido fitto a squadra in un muro, e comunque ne varii la densità di esso; vuol calcolarsi la Resistenza, che oppone alla frattura, ogni sezione del solido parallela al muro.*

Sol. Sia BCLAED cotesto solido, ed in esso si formi ovunque la sezione bFd parallela al muro PQ, ov'ei n'è fitto saldamente ed a squadra. Sarà chiaro, che la Renitenza, onde la sezione bFd opponesi alla frattura, debba essere nella ragion diretta del numero delle fibre contenute in essa sezione, e nell'inversa del momento, che farebbe intorno a bd il solido anteriore AbFLEd. Imperocchè può supporsi ragionevolmente, che questo solido faccia leva intorno a bd, e che siagli di contralleva la resistenza delle fibre della medesima sezione bFd. Or il numero delle fibre della medesima sezione è pro-

(a) Leggete la Dissertazione scritta su questo argomento dal Cel. Varignonio, ed inserita nell. *Memoir. dè l' Acc.* 1705: il Trattato delle Resistenze del P. Ab. Grandi *Cap. X. Instit. Mecc:* e 'l Trattato della coerenza di Musschembroek *nelle sue Dissert. Fisich.*

è proporzionale al prodotto della di lei densità nella grandezza, com'è di per se chiaro: e 'l momento del solido A b F L E d è come il di lui peso moltiplicato per la distanza, che ha dalla sezione b F d il centro di gravità di esso solido (197). Dunque la Resistenza, che la sezione b F d oppone alla frattura, è direttamente come la sua grandezza, e la sua densità, ed inversamente come il peso del solido A b F L E d moltiplicato per la distanza del di lui centro di gravità dalla sezione b F d. E quindi colla guida della moderna Analisi non v'ha cosa più facile, quanto il risolvere adeguatamente questo Problema, e nella maniera più universale. E questi son que'principj, che ne guidano alla più general soluzione di un tal Problema. C. B. F.

§. 260. Cor. I. *I solidi prismatici, ed omogenei, che sieno fitti a squadra in un muro, ed oltremodo gravati dal proprio peso, o dal peso di que' corpi, che vi pendono, frangonsi nelle loro attaccature alle pareti.* Imperciocchè come facilmente si comprende quivi è la loro sezione della minima resistenza.

§. 261. Cor. II. Ma negli altri solidi, ne' quali varii la densità della materia, o la sezione della figura; non sarà sempre d'accanto alla parete il luogo della lor frattura; ma dove ne sarà dal metodo de' massimi, e de' minimi determinato.

§. 262.

§. 262. Cor. III. E con questi Principj può ritrovarsi *quel solido, che fitto a squadra in un muro sia da per tutto ugualmente resistente, sicchè tiratolo fuori della parete, quanto ne piaccia, o vie più immersolo dentro ad essa sia in ogni stato ugualmente resistente, ed abile a reggere il proprio peso* (a).

PROP. XXXIV. PROBL.

§. 263. *Data una Verga elastica di ugual grossezza, che con un estremo sia fitta a squadra in un muro, e nell' altro abbia pendente un peso; calcolarne la sua incurvazione.*

Soluz. Sia A a B b l'incurvazione di questa lamina fitta a squadra nel muro A L, e gravata nel suo estremo B del peso P. Dall'estremo b della di lei curvatura interiore si tiri b L normale al muro a A L; e preso un qualunque punto C nella stessa curva si meni C H perpendicolare a b L, e si ponga b H $=$ x, H C $=$ y, b C $=$ s. Sarà il raggio del cerchio osculatore della curva in C uguale a $(-ds^3):dx\,ddy = -dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}:dp$, ove siasi posto $p\,dx$ in luogo di dy. Inoltre *Fig. 28.*

(a) I solidi di uniforme resistenza sì relativa, che assoluta furono deliziosi obbjetti delle menti del Galilei, del Viviani, del Grandi, e di altri Geometri Italiani.

tre la rigidezza dell'elemento C c si chiami R, P il peso pendente da b B, e P x il suo momento (81) in C. Sarà (239) $P x = - R dp : dx (1 + pp)^{\frac{3}{2}}$: e quindi

$$\frac{-P x d x}{R} = \frac{d p}{(1 + p p)^{\frac{3}{2}}}, \text{ ed integr.}$$

$$-\int \frac{P x d x}{R} = \frac{p}{\sqrt{(1 + p p)}} \quad A$$

Or suppongasi, che la rigidezza R sia costante, e facciasi $R : P = f f$; sarà, integrando il primo membro dell'equazione A, e restituendovi nel secondo il valore di p,

$$-\frac{x x}{2 f f} = \frac{d y}{\sqrt{(d x^2 + d y^2)}} : \text{ e quindi}$$

$4 f^4 d y^2 = x^4 d x^2 + x^4 d y^2$. E finalmente fatte le dovute riduzioni avrassi

$$d y = \frac{x x d x}{\sqrt{(4 f^4 - x^4)}}$$

Questa è l'Equazione della curva Elastica ritrovata dall'acutissimo Giovanni Bernulli Vol. IV. pag. 244. Sue Opere.

PROP.

PROP. XXXV. PROBL.

§. 264. *Calcolare le pressioni delle Colonne ritte, che sono presso a frangersi.*

Soluz. Dinoti ACB l'incurvazione di una Colonna ritta, che per una gagliarda pressione del peso P soprappostole sia presso a frangersi. La linea ACB differirà per poco dalla verticale BA tanto nella grandezza, che nel sito (243): e quindi le di lei ordinate CH, EK saranno proporzionali alle loro ascisse BH, BK. Laonde se pongasi $BH = x$, $CH = y$, e $BC = s$; il raggio dell'oscolo nel punto C, ch'è uguale a $(-ds^3) : dxddy$, diverrà $(-dx^2) : ddy$: imperciocchè la dx può prendersi per uguale alla ds. Ed esprimendosi per R la rigidezza costante, che ha nel punto C la divisata Colonna, e per P y il momento del peso P in C, come quello (81) ch'è proporzionale a P, ed a BH, o a CH; si avrà, per le cose dette nel §. 239 $(-R d d y) : d x^2 = P y$. Cioè, moltiplicando questa equazione per $2 d y : P$, ed ordinandola, sarà $2 R d y d d y : P d x^2 + 2 y d y = 0$. Facciasi $R : P = f f$, e s'integri quest'ultima equazione, avrassi (a) *Fig. 30. n. 1.*

(a) La grandezza gg è una costante *simmetrica*, che ne aggiungo all'equazione integrata.

$$\frac{ffdy^2}{dx^2}+yy=gg$$

E, fatte le convenevoli riduzioni, sarà

$$dx=\frac{fdy}{\surd(gg-yy)}$$

E, di nuovo integrando quest' equazione,

verrà $x=f.\,\text{Arc.Sen.}\,\frac{y}{g}$ *B*

Quì la costante, che dovrebbesi aggiungere per l' integrale completo, è zero: imperciocchè facendo $x=0$, diventa $y=0$.

§. 265. Cor. I. Facciasi $AB=a$, e nell' equazione B si ponga a in luogo di x, e zero in luogo di y; sarà $a=f.\,\text{Arc.Sen.}\,0$, cioè $a=f\pi$, ove π dinoti la semicirconferenza di un cerchio del raggio 1, e sarà $a^2=f^2\pi^2$. E riponendovi il valore di ff, ch'è $R:P$; avrassi $aa=R\pi\pi:P$, e $P=R\pi\pi:aa$.

§. 266. Cor. II. Le due Colonne ritte C, e C' sieno dotate delle rigidezze R, ed R', ed abbiano le lunghezze a, ed a'. Di più i massimi pesi, ch' esse valgano respettivamente a sostenere senza frangersi, sieno P, e P'; sarà per lo Corollario precedente $P=R\pi\pi:aa$, e per la stessa ragione $P'=R'\pi\pi:a'a'$. Dunque dovrà essere

$$P:P'::\frac{R\pi\pi}{aa}:\frac{R'\pi\pi}{a'a'}::\frac{R}{aa}:\frac{R'}{a'a'}$$

§. 267. Cor. III. Sicchè *il massimo peso, che può sostenere una colonna diritta, la quale abbia un dato diametro, ed una data rigidezza, è in duplicata ragione inversa della di lei lunghezza.*

§. 268. Cor. IV. Ed essendo tali colonne uguali, e simili, ma diversamente rigide, *i massimi pesi, ch' esse possono sostenere prima di frangersi, saranno come le loro rigidezze.*

§. 269. Cor. V. E perchè (264) si è ritrovato $x=f.\,\text{Arc.Sen.}\,\frac{y}{g}$; sarà vicendevolmente $y=g.\text{Sen.}\,\frac{x}{f}=g\,\text{Sen.}\,x\surd(P:R)$. Cioè a dire l' *incurvazione di una colonna, in parità di altre circostanze, è tanto maggiore, quanto è più grande quel peso, che le sovrasta.*

§. 270. Scol. Il Sommo Eulero *geometrizzando* su questo nuovo, ed utilissimo argomento compose tre belle Dissertazioni, che trovansi registrate nel II. *Vol. de' Nuov. Att. di Pietrob.*: ove tra le altre verità insigni vi son queste due, che ne soggiungo. I. *La forza, con cui una colonna ritta resiste ad un peso, che la gravi, è come il quadrato della sua grossezza diviso per quello della lunghezza.* II. *La massima altezza, che può avere una colonna cilindrica ritta, e rigida, affinchè dal proprio peso*

peso non venga a rompersi, è in suttriplicata ragione della di lei ampiezza. Sicchè chiamando D, e d i diametri di due colonne formate di una stessa materia rigida; saranno le divisate altezze come $\sqrt[3]{DD}$, e $\sqrt[3]{dd}$. Intanto per compimento di questa Teorìa piacemi proporvi un nuovo Teorema sulla rigidezza de' corpi, dimostrandolo coll' Analisi tratta da' principj della Prop. prec.

PROP. XXXVI. TEOR.

§. 271. *La rigidezza di una qualunque Colonna, ch' essendo ritta può sostenere il massimo peso P soprappostole, è direttamente come esso peso, e 'l cubo del di lei asse, ed inversamente come la quantità, di cui n' è uscita di piombo la di lei cima.*

Fig. 30. n. 2. DIM. Sia A il vertice dell' incurvazione della Colonna, cioè quel punto, ov' ella abbia la minima curvatura: e si ponga AT $=$ a, TB $=$ b, AV $=$ x, VC $=$ y. Sarà TV $=$ a$-$x, e 'l raggio d' oscolo nel punto C sarà uguale a $ds^2 : dxddy$, o a $dx^2 : ddy$, essendo ds in questo caso uguale a dx. E quindi dovendo essere il prodotto di P in CH uguale alla rigidezza dell' elemento Cc divisa per lo raggio d' oscolo (242); sarà $P(a-x) = Rddy : dx^2$. E moltiplicando questa equazio-

zione per 2 dx; avrassi $2Pdx(a-x) = 2Rddy : dx$. Ed integrando sarà $P(2ax-x^2) = 2Rdy : dx$. Con che, se di nuovo si moltiplichi questa equazione per dx, e poi s' integri, si otterrà $P(axx - \frac{1}{3}x^3) = 2Ry$: cioè $Ry = \frac{P}{6}(3axx - x^3)$. (In queste due integrazioni le costanti, che ho omesse, sono zero: imperciocchè facendo $x = o$, svanisce ogni termine dell' equazione, che si è integrata). Facciasi finalmente $x = a$, dovrà y diventar b; e sarà $Rb = \frac{P}{6}(3a^3 - a^3)$; cioè $R = Pa^3 : 3b$. Val quanto dire la rigidezza R della Colonna è direttamente come il peso massimo, che può sostenere, e come il cubo della sua lunghezza, o del suo asse, ed inversamente come la linea TB, onde n' è uscita di piombo la cima della Colonna. C. B. D. (*a*).

(a) Il Momento di una forza deesi esprimere per lo prodotto di essa in una retta (81). E la rigidezza di un corpo dovrà dinotarsi per lo prodotto di una forza nel quadrato di una retta. Imperciocchè dal §. 265. rilevasi $R = Paa : \pi\pi$, ove P è una forza, aa il quadrato di una retta, e $\pi\pi$ il quadrato di un numero, posto uguale ad 1 il raggio della circonferenza 2π. E queste riflessioni debbonsi aggiungere alla nor. (a) §. 328. Mecc. per intender le giuste espressioni, che coll' Analisi vuol farsi delle grandezze Meccaniche.

CAP. XI.

FORMOLE GENERALISSIME, CHE TRAGGONSI DALLA STATICA.

PROP. XXXVII. PROBL.

§. 272. *Calcolare il moto di un Sistema di Corpicciuoli, di cui ciascuno sia da più forze variabili animato, e tutti sieno uniti fra loro, come ne piaccia.*

Fig. 31. n. 1. I.° SOLUZ. Sia m uno di questi Corpicciuoli, il quale muovasi nella linea NSs animato da più forze variabili, le cui quantità acceleratrici sieno P, Q, R, &c. e le motrici mP, mQ, mR, &c. (91. Mec.). D'accanto al suo sentiero NSs s'intenda ovunque posto l'angolo cubico A, sicchè i lati di questo sieno le direttrici di quello. Ed inteso tutto ciò, che vi dichiarai nella Prop. 40. della Meccanica, il moto del corpicciuolo m, che stia trascorrendo un qualunque spazietto *Ss*, si risolva ne' tre moti laterali *Sn*, *Sm*, *So*, le cui direzioni sieno respettivamente parallele alle direttrici AD, AB, AC. Inoltre le tre coordinate rettangole AX, XY, YS si chiamino respettivamente x, y, z: onde saranno *Sn*, *Sm*, *So* uguali a dx, dy, dz. Ed indicando per ds lo spazietto *Ss*, e per dt il tempo, ond'ei vien descritto dal corpicciuolo m; saranno dx : dt, dy : dt, dz : dt le velocità, con ciascuna delle quali sarebbesi esso corpicciuolo separatamente condotto per le *Sn*, *Sm*, *So* (not. a. §. 241. Mec.).

II.° E poichè gli elementi di queste velocità variabili dx : dt, dy : dt, dz : dt sono respettivamente uguali a ddx : dt, ddy : dt, ddz : dt; le forze acceleratrici, che avrebberle prodotte nel tempuscolo dt, saranno $ddx : dt^2$, $ddy : dt^2$, $ddz : dt^2$, come quelle, che sono nella ragion diretta degl'incrementi di velocità, e nell'inversa de' tempi (116. Mec.): e le quantità motrici delle stesse forze saranno $mddx : dt^2$, $mddy : dt^2$, $mddz : dt^2$: imperocchè la quantità motrice di una forza centripeta è il prodotto della di lei quantità acceleratrice nella massa del corpo, che una tal forza investe (91. Mec.).

III.° Ciò posto le forze motrici $mddx : dt^2$, $mddy : dt^2$, $mddz : dt^2$ son potenti a produrre nel corpicciuolo m, ch'è nel suo Sistema, que' medesimi incrementi di velocità, che realmente gli han prodotti le forze motrici mP, mQ, mR, &c. Dunque per l'identità di questo effetto (213. Mecc.) dee esservi un'equivalenza nelle cagioni: cioè a dire le forze motrici $mddx : dt^2$, $mddy : dt^2$, $mddz : dt^2$ saranno equivalenti alle altre mP, mQ, mR, &c. E quindi la somma de' prodotti di ciascuna

 di

di queste forze nella di lei velocità virtuale sarà zero (Not. a. §. 238. Mec.). Con che, chiamando δx, δy, δz le velocità virtuali delle forze mddx : dt², mddy:dt², mddz:dt²: e δp, δq, δr, &c. le velocità virtuali delle altre m P, m Q, m R, &c, sarà

$$m\left(\frac{ddx}{dt^2}\delta x+\frac{ddy}{dt^2}\delta y+\frac{ddz}{dt^2}\delta z\right)+$$

$$m\left(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\&c.\right)=0 \qquad A$$

E per lo moto dell' intero Sistema de' corpicciuoli gioverà adottare la formola E, che nel §. 278. vi dichiaro.

§. 273. *Altro Ragionamento per ricavar questa formola.*

Compreso tutto ciò, che vi ho esposto nel n.° I.° e II.° della precedente soluzione, gli elementi di velocità, che le forze acceleratrici P, Q, R, &c. cercan di generare nel corpicciuolo m alla fine del tempuscolo d t, sono respettivamente uguali a Pdt, Qdt, Rdt, &c. (*a*). Or questi elementi di velocità estinguonsi entro lo stesso corpicciuolo, ed in loro

(a) Una forza acceleratrice moltiplicata per un tempuscolo produce quell' elemento di velocità, ch' essa forza ne avrebbe generato in un dato corpicciuolo.

loro vece ne son prodotti gli altri ddx:dt; ddy:dt, ddz:dt; i quali tendono ad ingrandir le coordinate x, y, z. Dunque, il corpicciuolo m avrà perduto alla fine del tempuscolo d t gli elementi di velocità Pdt, Qdt, Rdt, &c., e vi avrà benanche perduto gli elementi di velocità ddx:dt, ddy:dt, ddz:dt tendenti a minuirne le coordinate x, y, z (*a*). E quindi le forze valevoli a produrre gl' incrementi di velocità Pdt, Qdt, Rdt, &c., ddx:dt, ddy:dt, ddz:dt han dovuto equilibrarsi (*b*). E sarà zero la somma de' prodotti di ciascuna di queste forze nella di lei velocità virtuale. Ma tali forze motrici sono respettivamente uguali ad mP, mQ, mR, &c., mddx:dt², mddy:dt², mddz:dt², e le loro velocità virtuali sono δp, δq, δr, &c., δx, δy, δz. Dunque, moltiplicando ciascuna di queste forze per la sua velocità virtuale, ed agguagliando a zero la somma di tali prodotti, avrassi la formola A.

§. 274. Scol. I. Il primo di questi due ragionamenti, che mi riuscì adattare all' intelligenza de' Giovanetti, e che il sottoposi al discernimento de' Savj, è fondato *sull' equi-*

(a) Tanto è dire, che il corpicciuolo m abbiasi acquistato le velocità tendenti ad ingrandire le coordinate del suo sentiero, quanto che vi abbia perdute le stesse velocità dirette a diminuirne le dette coordinate.

(b) Not. a. §. 238. Mecc.

equipollenza (*a*) *delle forze motrici realmente impresse a ciascun de' divisati corpicciuoli, a quelle altre, che traggonsi dalla risoluzione del di lui moto*. E 'l secondo ragionamento è identico a quelle indagini, che ne sepper fare gl' illustri Geometri il Signor Luigi de la Grange, e 'l nostro Ab. Laubberg per otte-nerne la stessa formola A. (*b*).

§. 275. SCOL. II. In luogo delle due coordinate rettangole x, ed y si possono adottare queste altre due variabili ρ, e ϕ: di cui la prima dinoti quella retta, che dal principio delle indeterminate x conducesi al luogo, ov' è il corpicciuolo alla fine del tempo t: e l' altra ϕ esprima la posizione della retta ρ al piano delle due x, ed y. (*c*).

§. 276. *Riduzione della Formola* A.

Per rendere agevole il maneggio di questa formola sì semplice, e generale, giova primieramente minorare il numero delle variabili, ch'

(a) Il Problema dell' indagine de' centri di oscillazione fu risoluto dal chiarissimo Ermanno con un analogo metodo, cioè *coll' equipollenza delle sollicitazioni centrali alle loro vicarie*.

(b) Vedete *pag.* 95. *Mechan. analyt.* de la Grange, e l' *Unità de' Principj Meccanici* dell' Ab. D. Carlo Laubberg.

(c) Vedere *nelle Miscell. di Turin.* Vol. II. §. 4. *applic. del Metodo delle variazioni a' Problemi Meccanici*.

ch' ella racchiude: procurando d' esprimere le variabili p, q, r, &c. per le coordinate x, y, z, e le variazioni di quelle per le variazioni di queste. Lo che si esegue nel seguente modo.

Il punto g posto comunque dentrò, o fuori dell' angolo cubico A, sia il centro della forza P, di dove si meni g y perpendicolare al piano B A D incontrandolo in y, e da y si cali y x perpendicolare su di A D. Il corpicciuolo m si trovi alla fine del tempo t in S, le cui coordinate rettangole sieno AX, XY, YS respettivamente uguali ad x, y, z; e sia $Ax = a$, $xy = b$, $yg = c$: si congiungano le S g, ed Y y, e da' punti S, ed Y si calino S t, Y r respettivamente perpendicolari a g y, ed x y; saranno Y r, r y, e t g respettivamente uguali ad $a - x$, $b - y$, $c - z$. E poichè Sg^2 è uguale ad $St^2 + tg^2$, ed è poi Yy^2 o St^2 uguale ad $Yr^2 + ry^2$; sarà $Sg^2 = Yr^2 + ry^2 + tg^2$: cioè $pp = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$. Ed esprimendo per a', b', c' le coordinate, che corrispondono al centro della forza Q, per a'', b'', c'' quelle del centro della forza R, &c; si dimostrerà nello stesso modo, che sia $qq = (a' - x)^2 + (b' - y)^2 + (c' - z)^2$, $rr = (a'' - x)^1 + (b'' - y)^2 + (c'' - z)^2$, &c. Dunque si avranno ne' valori delle sole x, y, z le variabili p, q, r, s, &c, e nelle variazioni di quelle le variazioni di queste. Con che indicandosi per X l' aggregato di quelle grandez- *Fig.* 31. *n.* 2.

ze

ze, che dopo una tale sostituzione si trovano moltiplicate per $m\,\delta x$: per Y l'aggregato di quelle altre, che veggionsi moltiplicate per $m\,\delta y$, e per Z quelle, che sono moltiplicate per $m\,\delta z$; la formola del Problema precedente ridurrassi a quest'altra.

$$m\left(\frac{ddx}{dt^2}+X\right)\delta x+Sm\left(\frac{ddy}{dt^2}+Y\right)\delta y+$$
$$m\left(\frac{ddz}{dt^2}+Z\right)\delta z=0 \qquad \text{B}$$

§. 277. Quando vuol impiegarsi la formola B per risolvere un Problema particolare di questo genere; il Sistema de' corpicciuoli, ch' è *dato di sito, e di magnitudine*, ne offrirà delle peculiari equazioni, che diconsi *di condizione*, le quali saggiamente combinate colla stessa formola ne dovran minorare il numero delle variabili, ch' ella vi racchiude.

RIFLESSIONI SULLE FORMOLE A, e B.

§. 278. I. Le due Formole A, e B appartengonsi al solo corpicciuolo m del proposto Sistema. Ma se ne piaccia adattarle all' intero Sistema, dovrà moltiplicarsi ciascuna di essa per la lettera S, che suol prendersi per dinotar la somma di cotesti corpicciuoli. E quindi le formole A, e B si cangeranno in queste altre

S m

$$Sm\left(\frac{ddx}{dt^2}\delta x+\frac{ddy}{dt^2}\delta y+\frac{ddz}{dt^2}\delta z\right)+$$
$$Sm(P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\&)=0 \qquad \text{E}$$

$$Sm\left(\frac{ddx}{dt^2}+X\right)\delta x+Sm\left(\frac{ddy}{dt^2}+Y\right)\delta y+$$
$$Sm\left(\frac{ddz}{dt^2}+Z\right)\delta z=0 \qquad \text{F}$$

§. 279. II.° Le due lettere S, ed ∫ son due *indicazioni sommatorie*, che si appartengono a diverse grandezze: cioè la prima rapportasi a' corpicciuoli del Sistema, e l' altra alle variabili x, y, z, p, q, r, &c. e ciascuna di esse è indipendente dall' altra. Con che l' espressione $\int d.\,Sm\,X\,dx$ è identica a quest' altra $d.Sm\int X\,dx$: e, quando ne abbisogni, una di esse potrà trasformarsi nell' altra. Inoltre vuol sapersi, che i segni d, D, δ di grandezze infinitesime son diversi tra loro, e ciascuno dagli altri due indipendente. Il primo d si rapporta al segno integrale ∫, e riguarda il sentiero del corpicciuolo m. L' altro D, ch' è relativo all' indicazione integrale S, rapportasi agli elementi del Sistema de' corpicciuoli, ed al sito istantaneo, ch' essi han fra loro. E finalmente il segno δ della *variazione* dinota un cangiamento

to

to arbitrario, che può supporsi addivenire al sito di essi corpi.

§. 280. III. Se il Sistema di tali corpicciuoli sia un corpo continuo, avente la massa indefinita M, dovrà porsi dM in luogo di m tanto nella formola E, che nell' altra F. E questa sostituzione potrà farsi, o che la figura della massa M sia costante, come si verifica ne' corpi rigidi, o ch' ella ne cangi, come a' corpi flessibili, ed a' fluidi addiviene.

§. 281. IV. Ed essendo interamente libero il Sistema di tali corpicciuoli, ciascuna delle tre parti della Formola F dovrà farsi uguale a zero: cioè

$$S\,m\left(\frac{ddx}{dt^2}+X\right)=0$$

$$S\,m\left(\frac{ddy}{dt^2}+Y\right)=0$$

$$S\,m\left(\frac{ddz}{dt^2}+Z\right)=0$$

§. 282. V. Per maneggiar con franchezza queste formole, che contengono variazioni di grandezze variabili, giova intender bene i due seguenti Teoremi, che son come due basi del novello, e generalissimo Calcolo *delle Variazioni* inventato dal Cel. Sig. Luigi de la Grange *Vol. II. Miscell. Taurinens.* (*a*).

§. 283. TEOR. I. *La Variazione di un differenziale è quanto il differenziale della Variazione.*

Cioè se X dinoti una qualunque grandezza variabile, sarà sempre $\delta.dX=d.\delta X$. E generalmente può dirsi, che i duplici segni δd, δd^2, &c. equivalgano respettivamente a $d\delta$, $d^2\delta$, &c.

§. 284. TEOR. II. *La Variazione dell' Integrale di una formola è quanto l' integrale della Variazione della stessa formola.*

Cioè esprimendosi per $\int X$ l' integrale della formola qualunque X, sarà sempre $\delta.\int X=\int\delta X$.

ESEM-

(a) Il Calcolo delle Variazioni è un Metodo di ritrovare la variazione, che s' induce in una formola comunque composta da più variabili, quando alcune di queste, o tutte suppongansi variare. Or le variazioni delle grandezze variabili x, y, z, &c., non sono, che loro parti infinitesime, ciascuna delle quali ha un' arbitraria magnitudine, e serbansi fra loro un rapporto vago, ed indipendente da quello delle variabili, di cui esse sono parti. E questo è il principal divario, ch' evvi tra le variazioni delle grandezze x, y, z, &c., e tra i differenziali delle stesse variabili. Intanto le variazioni delle grandezze x, y, z sogliomsi esprimere per δx, δy, δz &c; e i differenziali di x, y, z, per dx, dy, dz &c.

Il metodo di prender le variazioni delle variabili ha le stesse leggi del Calcolo differenziale, tranne la sola caratteristica.

ESEMP. I.

§. 285. Per non lasciar nudo d' esempli questo generalissimo Problema, supponghiamo, che le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z, \delta p, \delta q, \delta r$, &c. si riducano a' differenziali dx, dy, dz, dp, dq, dr, &c.: e che $P dp + Q dq + R dr +$ &c. sia uguale a $d\Pi$ (a); la formola E si cangerà in quest' altra

$$S\left(\frac{dxddx+dyddy+dzddz}{dt^2}+d\Pi\right)m = o \quad \text{H}$$

Si chiami u la velocità, onde il corpicciuolo m conducesi per lo spazietto ds nel tempuscolo dt; sarà $u = ds:dt$, ed $\frac{1}{2}u^2 = ds^2:2dt^2$; e quindi $udu = d.(ds^2:2dt^2) = d.(dx^2+dy^2+dz^2):2dt^2$: vale a dire sarà

$$udu = \frac{dxddx+dyddy+dzddz}{dt^2},$$

e quindi l' Equazione H diverrà

$S(udu+d\Pi)m = o$. Ed integrandola sarà

$$Sm\left(\frac{u^2}{2}+\Pi\right) = C$$

Qui la grandezza C è una costante uguale a quel valore, che avrà il primo membro dell' Equazione in un istante dato. Dunque sarà

$$Smvv = 2C - 2S\Pi m.$$

(a) L' espressione $Pdp + Qdq + Rdr +$ &c. avrà un' integrale Π, se le forze P, Q, R, &c. tendano a centri fissi, come lo è in Natura, e le loro quantità acceleratrici sieno come le *funzioni qualunque* delle distanze di ciascun de' corpicciuoli da essi centri.

§. 286. COR. Da questo ultimo risultato emerge il celebre Teorema sulla conservazione delle forze vive, che suol esprimersi ne' seguenti termini.

TEOR. *La forza viva di un Sistema di corpicciuoli, ciascun de' quali n' è comunque animato dalle forze acceleratrici* P, Q, R, &c, *sarà la stessa, o che questi corpicciuoli sieno disciolti, o costantemente tra se legati, come ne piaccia.*

ESEMP. II.

§. 187. Nell' esempio precedente ho dimostrato essere $\frac{Smu^2}{2} = C - Sm\Pi$; dunque prendendo le variazioni di queste grandezze sarà $Smu\delta u = -Sm\delta\Pi$. Ma è poi (not. a. §. 200.) $d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr +$ &c.: ed è anche $\delta\Pi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r +$ &c. Dunque sarà $Sm(P\delta p + Q\delta q + R\delta r +$ &c.$) = -Smu\delta u$. E quindi l' equazione E si cangerà in quest' altra

$$S(ddx\delta x + ddy\delta y + ddz\delta z)\frac{m}{dt^2} - Smu\delta u = o,$$

E moltiplicando quest' Equazione per dt, ed ordinandola, come quaggiù ne appare, avrassi

$$S(ddx\,\delta x + ddy\,\delta y + ddz\,\delta z)\frac{m}{dt} = Smudt\,\delta u = Smds\,\delta u \qquad G$$

ponendo ds in luogo di udt.

Ma poichè le grandezze $\frac{1}{2}(dx^2+dy^2+dz^2)$, ed $\frac{1}{2}ds^2$ sono uguali fra loro; dovranno anche pareggiarsi le variazioni di esse: cioè $dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz$, e $ds\,\delta ds$. Onde moltiplicandole per $Sm : dt$, sarà

$$S(dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz)\frac{m}{dt} = \frac{Smds\,\delta ds}{dt} = Smu\,\delta ds \qquad K$$

E sommando respettivamente i primi membri, ed i secondi delle due Equazioni G, ed K, dovrà risultarne

$$S\begin{pmatrix} ddx\delta x + ddy\delta y + ddz\delta z \\ dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz \end{pmatrix}\frac{m}{dt} = S(ds\,\delta v + v\,\delta ds)m$$

cioè $Sd.(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)\frac{m}{dt} = S.\delta(uds)m$

e, passando il segno S sotto i segni d, e δ (279), sarà

$$d.S(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)\frac{m}{dt} = \delta.S(uds)m.$$

Ed integrando

In

$$S(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)\frac{m}{dt} = \int\delta.S(uds)m = \delta Sm\int uds$$

In questa integrazione la costante da aggiungersi è zero: imperciocchè δx, δy, δz son zero nel punto, ove cominciano gl' integrali. E supponendo, che le medesime variazioni δx, δy, δz anche sien nulle nel punto, ove terminano gl' integrali $\int uds$: sarà $\delta.Sm\int uds = 0$, e quindi $Sm\int uds$ un Massimo, o pure un Minimo. Ed eccone su di ciò un generalissimo Teorema, che racchiude il famoso principio del *Minimo d' Azione* (a).

N 2 §. 288.

(a) Quanti sono que' moti, che in ogn' istante vengono eccitati ne' Solidi, ne' Fluidi, ne' Corpi Sullunari, ed in quegli altri, che n' empiono gl' immensi Cieli, tanti Problemi coll' arduo metodo de' Massimi, e de' Minimi in ogn' istante risolvonsi nell' Universo. Dunque il Gran Geometra della Natura sarà mai, come l' empio il dice, lo stupido, l' inerte, e l' impossibil caso? E quindi ben si avvide il Sig. de' Mopertuì, che il Principio della *Minima Azione* sia il più poderoso argomento, onde l' Ateo il più protervo n' è stramazzato. Imperciocchè le primitive leggi del moto, qual è *la legge d' inerzia*, *il Principio della composizion delle forze istantanee*, *e quello dell' accelerazione delle continue*, non son che contingenti, e capaci di esser tutt' altre di ciò, che sono. Dunque elleno non emersero dall' intimo de' corpi, come proprietà loro; ma Ente straniero le prescrisse, scegliendo quelle, che con un minimo d' azione produrrebbero sempre i moti nella Natura, qualunque sieno i corpi, che si muovono, ed i moti ch' essi ne ricevono. E quindi questo generalissimo Teorema

§. 288. TEOR. *Siavi un Sistema di corpi; che scambievolmente attraggansi, o che tendano a centri fissi con forze proporzionali a funzioni delle distanze; sarà sempre un Massimo, o un Minimo la somma de' prodotti di ciascun corpo nell' integrale della sua velocità moltiplicata per l' elemento della curva, ch' ei ne sta descrivendo.*

SCIEN-

rema è l'indice della più saggia economìa, ch' evvi nella Natura, e 'l più saldo argomento per mostrarne l' infinita Provvidenza, ed Arte di colui, che le presiede. Ed un tale argomento farà mai sempre il massimo colpo nel nostro spirito, sol che non si stupidisca nostra ragione, o non ci si proponga una formola universale (lo che è impossibile) la quale ne mostri, che comunque variando le primitive leggi de' moti, sempre un Minimo d' Azione ne accompagni lo sviluppo de' movimenti, e 'l progresso loro.

SCIENZA DE' FLUIDI.

CAP. I.

Generali considerazioni su i Fluidi.

§. 1. Defin. I. Quel corpo, di cui ciascuna particella preme ogni altra, che l'è intorno, con tanta forza, con quanta dalle verticali n'è premuta, *Fluido* si domanda.

§. 2. Cor. I. La pressione verticale, che recasi ad una particella di Fluido, vi genera tante altre pressioni uguali, e per tante diverse direzioni, quante sono le adjacenti particelle, ch' ella toccandole n'è costretta di premerle.

§. 3. Scol. Questa mirabile moltiplicazion di forze, che fassi ne' Fluidi, è ciò che forma la natura loro, e li distingue non pur da' corpi rigidi, e consistenti; ma da' mucchj di rena, e di polve, da' corpi molli, e semiliquidi, e da quegli altri, che il volgo co' veri Fluidi confonde. Ella è ancora un semplice, e adeguato principio, donde rigorosamente si possano dimostrare le leggi dell' equilibrio de' Fluidi, quelle delle pressioni da essi esercitate nelle pareti de' vasi, ove contengonsi, e nelle superficie de' solidi, che vi s' immergono. Laddove volendo riporre la natura del Fluido nell' *estrema pic-*

ciolezza delle sue parti, nella sfericità loro (a); *nel menomo nesso, ch' avvi tra esse, o nell' essere da un perenne, ed intimo moto agitate, o penetrate da gran calore*, si durerà fatiga non solo a dimostrare, ma ad ispiegare verisimilmente quanto all' equilibrio, ed al movimento di esso Fluido si appartiene.

§. 4. DEFIN. II. *Fluido Omogeneo* dicesi quello, che in ciascuna parte del suo volume una stessa densità ritiene: com' è l'*Acqua*, l' *Olio*, lo *Spirito di Vino*, il *Mercurio* &c.

§. 5. DEFIN. III. E si chiama *Eterogeneo* quell' altro, che non ha una medesima densità in ogni parte del suo volume. Di questo genere *è il fluido atmosferico, che cinge la nostra Terra*.

§. 6. DEFIN. IV. Un Fluido dicesi *Elastico*, se sia capace di ridursi in maggiore, e minor volume di quello, ch' ei tiene. Tali sono l'*Aria atmosferica*, *i Fluidi aeriformi*, &c.

§. 7. COR. Dunque ogni Fluido grave, ed elastico è eterogeneo.

§. 8. SCOL. Per questo *potere espansivo*, che vi è in certi Fluidi, e che ad altri ne manca, i primi soglion dirsi *Fluidi compressibili*, ed *incompressibili* i secondi.

§. 9. DEFIN. V. Un Fluido si dice *stagnante*, se niun moto si scorga in esso.

§. 10. DEFIN. VI. *Colonna* di un Fluido è l' ag-

(a) Leggete la nota del §. 27.

l'aggregato di tutte quelle di lui particelle, che vi si contengono in una stessa retta verticale. Tali sarebbero i filamenti MA, NB, &c. del fluido SPQT. *Fig.* 32. *n.* 1.

§. 11. DEFIN. VII. *Strato Orizzontale* di un Fluido è la somma di quelle di lui particelle, che vi si ritrovano in uno stesso piano orizzontale.

§. 12. DEFIN. VIII. *Gravità Specifica* di un corpo è il peso, ch' ei tiene sotto un dato volume.

§. 13. COR. I. Dunque la gravità specifica di un corpo è come il n.° degli elementi di materia, ch' ei comprende in un dato volume, e come la forza acceleratrice di ciascuno di essi: cioè come la densità di esso corpo (a), e come la di lui forza acceleratrice.

§. 14. COR. II. Ed essendo costante la forza acceleratrice ne' luoghi della nostra Terra, ove n' è dato praticar l' esperienze; le gravità specifiche de' corpi, che si ritrovano fra noi, saranno come le densità di essi.

§. 15.

(a) La densità di un corpo è il numero degli elementi di materia, che n' empiono la di lui mole. E quindi sarà chiaro, che la massa di ciascun corpo debba essere come il volume, e la densità, ch' ei contiene. Con che chiamando M, ed m le masse di due corpi, V ed u i loro respettivi volumi, *D*, e *a* le respettive densità di essi; sarà M : m :: (V : v) (D : d). Ed in forza della Prenoz. IV. Vol. I., avrassi V : v :: (M : m) (d : D), e D : d :: (M : m) (v : V).

§. 15. Scol. Il volume, che si suol assumere per unità, è il piè cub. parig.

Fig. 37. §. 16. Defin. IX. *Scala delle densità di un Fluido* dicesi la curva QRV, di cui l'asse AE n'è verticale, e le sue ordinate, BR, CS, DT, &c. sono come le densità del Fluido ne' corrispondenti luoghi B, C, D, &c.

§. 17. Defin. X. *Scala delle gravità specifiche di un Fluido* è la Curva HIL, di cui l'asse AE n'è anche verticale, ma le sue ordinate BI, CK, DL, &c. son proporzionali alle gravità specifiche del Fluido ne' luoghi B, C, D, &c.

§. 18. Cor. Con che descrivendosi intorno al medesimo asse AF la Scala delle forze centripete MNP, e queste altre due curve QRT, HIL; saranno le ordinate BI, CK, DL, &c. della Scala delle gravità specifiche, come i rettangoli di RB in BN, di SC in CO, di TD in DP, &c. fatti dalle corrispondenti ordinate della Scala delle densità, e dell'altra delle forze centripete.

CAP. II.

Teoria de' fluidi omogenei stagnanti.

PROP. I. TEOR.

§. 19. *Se nel Vase aperto DPQR contengasi un liquore omogeneo stagnante; la sua superficie suprema farà un piano orizzontale, o ne starà a livello*, come suol dirsi. Fig. 32. n. 1.

E se tal fluido stagnante stia entro a' tubi comunicanti XG, YH; *le superficie supreme, che ha esso fluido ne' tubi, saranno a livello, ed ugualmente alte.* n. 2.

Part. I. Si prendano in uno strato orizzontale di questo fluido le due particelle picciolissime *a*, e *b*, che sieno contigue; e s'è possibile le Colonne *Ma*, *Nb* loro soprapposte non sieno tra se uguali: (lo che dee necessariamente accadere, quando lo strato supremo di questo fluido non vogliasi orizzontale); onde una di esse, come la *Ma*, sia maggiore dell'altra *Nb*. Sarà il peso di quella maggiore del peso di questa. Or la pressione esercitata dalla Colonna di fluido *Ma* (1.) sulla particella *a* sottopostale si trasmette interamente nell'altra *b*: e la e la pressione, fatta dalla Colonna Nb su di b, per la stessa ragione si trasfonde in a. Dunque sarà la pressione esercitata dalla particella a sull' altra b maggiore della forza, onde questa quella ne preme: e quindi le due Colonne di fluido Ma, Nb non si dovranno equilibrare. E potendo in simil guisa dimostrarsi lo stesso addivenire ad altre Colonne di questo fluido; sarà chiaro, che in esso vi si debba eccitare un tumulto, un' ondeggiamento, o altro moto, ch'è contro all' Ipotesi del Teorema.

Part. II. Prendansi ne' tubi comunicanti XG, YH le due Colonne di fluido hm, kn, in mezzo alle quali vi stia la serie delle di lui particelle mn disposta orizzontalmente; sarà la pressione, esercitata dalla prima Colonna verticale hm sulla serie mn delle particelle intermedie, uguale al peso di essa Colonna: e quella, che vi esercita kn, sarà puranche uguale al peso di questa altra Colonna. Dunque, perchè tali pressioni si equilibrino, convien che sia hm uguale a kn. E ciò sempre dimostrandosi saranno le due superficie Ee, Ff non solo orizzontali, ma in uno stesso piano. C. B. D.

§. 20. Cor. I. Ogni particella di un Fluido stagnante preme ugualmente quelle, che le stanno intorno (2), e da ciascuna di queste con altrettanta forza n'è premuta (2). Dunque, distruggendosi queste uguali, ed opposte pressioni, dovrà seguirne, *che ogni parte di un fluido stagnante non graviti in quel luogo, ov' ella si giace. E ch' ella agevolmente ceda ad ogni forza, che le s' imprima* (a).

§. 21. Cor. II. *Se dentro a' tubi comunicanti* G X, H Y *contengansi due liquori omogenei di densità diverse*, per esempio nel I.° di essi siavi dell' acqua, e nell' altro del mercurio; *dovranno essere in caso d' equilibrio le altezze* hm, on *di questi fluidi nell' inversa ragione delle densità loro*. Una tal verità intendesi agevolmente, ponderando la dimostrazione della II. Part. del Teorema. E quindi per lo proposto esemplo tali altezze saranno nella ragione di 14 ad 1, com'è per appunto la gravità specifica del mercurio a quella dell' acqua (b).

§. 22.

(a) Il Cavalier Newton ha definito il Fluido *esser quel corpo, le di cui parti cedon facilmente ad ogni forza, che loro s' imprime, onde tosto debbansi muovere* Sez. V. Lib. II. Princ. Mat. Ma questa definizione, da ciò che ho rilevato nel Cor. I. prop. pres., sembra, che piuttosto esprima lo stato stagnante del Fluido, che la di lui natura.

(b) Un dì ragionando sulle inuguali altezze, cui estolgonsi l' acqua, e 'l mercurio ridotti all' equilibrio in un sifone curvo nell' una sua parte, vi fu chi mi chiese, che ne dovrebbe addivenire in tai liquori, se

nel

§. 22. Cor. III. *Se in un vase, ove contengasi un fluido omogeneo stagnante, vi s' immerga un tubo aperto ne' suoi estremi; il fluido contenuto nel vase dovrà entrar nel tubo, spignendovisi all' insù fino al livello di esso fluido nel vaso.*

§. 23. Scol. I. Se due tubi comunicanti si empiano d' acqua, ed uno di essi si riscaldi oltremodo; l' acqua, che in questo si contiene, diverrà più rara, e più alta di quella, ch' è nell' altro tubo: onde avverrà, che questo fluido ne regga in equilibrio a diseguali altezze.

§. 24. Scol. II. Se un tubolino capillare immergasi in un vase pieno d' acqua, sicchè ei vi stia verticalmente; vedrassi l' acqua

nel tubo, ov' è l' acqua, altra a stille a stille si rifondesse? Forse il mercurio, mi si diceva, incalzato dall' acqua rinculerà dal curvo del sifone, e resterà pensile su di essa? o l' acqua trapelando pe' meati del mercurio vi si farà al di sopra, e'l farà gire a fondo? L' ingegnosissimo D. Annibale Giordano, ch' era meco, si attenne a questa seconda opinione, ed impegnossi a dimostrarmela: mentre io gli diceva non essere improbabile, che il mercurio sollevato sull' acqua quivi si mantenesse in un equilibrio labile, come l' aveva detto l' Eulero in una Dissert. de' fluidi *Nov. Com. Ac. di Pietrop. Vol. XIII.* Ma poichè le sole speculazioni decidon poco su certi moti de' fluidi, amendue ne riclamammo alla Natura, istituendo l' indicata sperienza: e si vide l' acqua penetrarne il mercurio, e farglisi al di sopra, com' erasi pensato dal Sig. Giordano.

qua ascender nel tubolino molto al di sopra del livello, ch' ella tiene nel vase. E se questo vase sia ripieno di mercurio, ed in simil modo vi si merga quel tubolino; il mercurio entrerà nel tubolino, e vi reggerà in equilibrio al di sotto del suo livello nel vase. De' quali fenomeni la cagione, e la legge ignoransi del pari.

PROP. II. TEOR.

§. 25. *Se il Vase HBC sia ripieno di un fluido omogeneo stagnante; io dico, che ogni particella D delle sue pareti sia premuta da una forza normale, ch' è quanto il peso di un prisma dello stesso liquore, che abbia per base la particella D, e per altezza la sua distanza dal livello del fluido.* Fig. 35. n. 1.

Dim. Fingasi il vase forato in D, e quivi fermatogli a squadra il tubolino DF aperto in D, ed in F. Egli è chiaro, che il fluido rinchiuso nel vase HBC debbasi comunicare all' annesso tubolino DF, estendendosi fino al suo livello AE (19). Onde sarà la pressione normale, che in D vi esercita il fluido del vase, uguale a quella, che vi fa per FD il fluido del tubolino. Ma questa pressione sta al peso del fluido con-

contenuto entro lo stesso tubolino, come DG a DF (246.Mec.), o come il prisma, che ha D per base e DG per altezza, all'altro DF: o finalmente come il peso del fluido contenuto nel primo di questi tubolini a quello del secondo: (imperciocchè le masse, o i pesi di due corpi ugualmente densi sono come i volumi loro). Sarà dunque la pressione esercitata in D dal fluido rinchiuso nel tubolino DF uguale al peso dello stesso liquore, che avrebbe D per base, e DG per altezza. E quindi la particella D delle pareti del vase HBC ripieno di uno stesso liquore fino ad AE sarà dal fluido perpendicolarmente premuta con una forza uguale al peso di un prisma dello stesso fluido, che abbia D per base, e DG per altezza. C.B.D.

§. 26. Cor. I. Ogni particella del fondo di un qualunque vase, ove stiavi un liquore omogeneo stagnante, sostiene il peso di un prisma dello stesso fluido, la cui base è la particella premuta, e l'altezza la di lei distanza dal livello del fluido.

§. 27. Cor. II. Se un vaso, che abbia il suo fondo (*a*) orizzontale più stretto, o più lar-

(a) Il Sig. Guglielmini nel I. Capo sulla Natura de' Fiumi dimostrò egregiamente, che, *riempiendo un vase di varj strati di sfere, ciascuna di esse debba comunicare alle sue adjacenti quella stessa impressione, che dalle su-*

largo della sua bocca, riempiasi di un fluido omogeneo; esso fondo sosterrà tanto peso, quanto di liquore può contenersi in un prisma, che abbia per base quel fondo, e per altezza la sua distanza dal livello del fluido.

§. 28. Cor. III. E quindi il fondo di un vase conico ripieno d'acqua stagnante sarà caricato dal peso di quell'acqua, che si con-

O ter-

superiori vi riceve. Ei vi concluse altresì, che, *la suprema superficie, alla quale compongonsi le più alte infra di esse, debba formare un piano orizzontale*: che, *ritrovandosi coteste sfere entro a' vasi comunicanti, non possa succederne l'equilibrio, se gli strati supremi delle medesime non sieno orizzontali, ed ugualmente alti*, &c. Ma non si dimostrarono dal Valentuomo le converse Proposizioni, cioè, *che i corpicciuoli di un sistema debbano essere di figura sferica, qualora ognuno di essi ne prema i circostanti con quella stessa forza, onde da' superiori n'è gravato*: che *il livellarsi di questi corpicciuoli nasca solo dalla sfericità di essi*; che &c. Dunque dalla Teorìa del Guglielmini non può trarsi, che le parti de' fluidi sieno sferiche. Che anzi dalle osservazioni microscopiche istituite da' nostri Valenti Fisici, il P. D. Gio. Maria della Torre, il Sig. Ab. D. Vincenzo Mazzola, D. Antonio Barba, alle quali più volte io v' intervenni, si è sempre rilevato esser cilindriche, e non globose le parti del nostro sangue. Ed affinchè questa figura non si credesse un'ottica illusione cagionata da' microscopj a palline, come si obiettava da alcuni Fisici stranieri, l'Ab. Mazzola, e'l Signor Barba han mirabilmente lavorato delle lentine microscopiche sì picciole, che il loro ingrandimento lineare ascende a 2000: e con esse distintamente veggonsi come tante ciambellette le parti del nostro sangue, quali eransi vedute co' microscopj a palline del P. Torre.

terrebbe in un cilindro della stessa base, e della stess' altezza di esso cono.

§. 29. Cor. IV. E supponendo orizzontalmente posti i fondi de' vasi cubici, prismatici, cilindrici, conici, o di altra figura; in virtù di questo Teorema potrete agevolmente calcolare le pressioni fatte nelle pareti di essi dall' acqua, che li riempie.

§. 30. Cor. V. Si chiami p una particella di un qualunque vaso premuta da un fluido omogeneo, che vi si contiene: e sia d la densità di questo, ed a la distanza di p dal livello del fluido; sarà l' energìa della pressione, che lo stesso fluido arreca su di p, uguale ad apd.

Fig. 35. n. 2. §. 31. Cor. VI. Sia ABM quella curva, dalla cui rivoluzione intorno al suo asse BM verticale ne sia generato il vaso ABC, e questo intendasi ripieno di un liquore omogeneo stagnante; *sarà la pressione, che fa questo fluido sull' armilla generata da D d, come la densità del fluido, e come un' anello cilindrico, che abbia per base la mentovata armilla, e per altezza la distanza D K di essa dal livello del fluido.*

PROP.

PROP. III. TEOR.

§. 32. *Poste le medesime cose del Cor. prec., se nel vaso ABC, il di cui fondo AC stia rivolto all' ingiù, ed in sito orizzontale, contengasi un liquore omogeneo stagnante; la forza, onde questo fluido ne sospigne verticalmente le pareti del vaso, sta alla pressione, ch' ei fa sul di lui fondo, com' è la differenza del vase dal cilindro circoscrittogli, all' ampiezza dello stesso cilindro.* Fig. 35. n. 2.

Dim. Nella curva ABM generatrice del vaso si prenda l' elemento D d, e pe' suoi estremi vi si conducano le orizzontali DE, de, finchè incontrino in E, ed e l' opposto ramo della curva. Pe' medesimi punti D, e d conducansi le rette KF, kf parallele all' asse BM: ed elevata la retta DP perpendicolare alla curva d D, che rappresenti la forza, con che il fluido preme il punto D del vase, si calino PQ, PV perpendicolari sulle DR, DF. Facciasi finalmente la medesima costruzione nell' altro ramo BC della medesima curva sarà, com' è di per se manifesto, il triangolo DPQ uguale, e simile all' altro TSE.

Ciò premesso la forza normale PD, onde il fluido contenuto nel vase ABC lo preme in D, equivale alle due forze laterali QD, VD, di cui la prima orizzontalmente vi si eserci-

ci-

cita per QD, e l'altra verticalmente per VD. E le altre due forze TE, OE, in che risolvesi la forza SE, premono in simil guisa il punto E, quella cioè orizzontalmente da T verso E, questa verticalmente per OE. Ma le forze orizzontali QD, TE, perchè uguali e contrarie, si elidono senza produrne altro effetto: dunque i due punti opposti D, ed E della riferita curva saranno sospinti per DK, ed EL con forze proporzionali ad VD. E quindi la forza, onde il fluido sospigne la superficie cilindrica generata dall' archetto Dd, sta alla forza, con cui la preme per PD, come VD a PD, o come *Dr* a *Dd* (essendo tra se simili i due triangoli DVP, *Drd*). Ma, rivolgendosi la curva ABM con perfetta rivoluzione intorno a BM, sta *Dr* a *Dd*, come la superficie dell' armilla circolare di *Dr* alla superficie cilindrica di *Dd*: o come l' anello cilindrico, che ha per base l' armilla di *Dr* e per altezza DK, a quell' altro anello, che avrebbe per base la superficie di *Dd*, e per altezza la stessa DK. Dunque nella ragione di questi due anelli cilindrici starà la forza, con cui il fluido sospigne la superficie di Dd, a quella, colla quale perpendicolarmente la preme in D. Ma questa pressione sta a quell' altra, che il medesimo fluido esercita sull' armilla circolare di *Ff*, come l' anello cilindrico, che ha per base la

la superficie di *Dd*, e per altezza DK, all' anello cilindrico generato da fK intorno a BM (31). Sarà dunque per uguaglianza ordinata la forza del fluido elevatrice della superficie di *Dd*, alla pressione, ch' ei ne fa sull' armilla di Ff, come l' anello cilindrico di *KkdD* all' altro di *KkfF*. E quindi *componendo* sarà la forza, onde il fluido sospinge l' intera superficie del vaso, alla pressione, ch' ei vi arreca sulla di lui base, come la scudella AHICB, ch' è la differenza del vaso ABC e del cilindro AHIC circoscrittogli, all' ampiezza dello stesso cilindro. C.B.D.

§. 33. Scol. Dalle cose, ch' io vi dichiarai nel principio di questa Scienza, non istenterete ad intendere per qual cagione il fluido contenuto nel vase acuminato HBC mentre ne grava la di lui base, insiem ne sospinge le pareti. Or suppongasi rigido cotesto vase, e ben chiuso da per ogni parte, e ne giaccia il suo fondo in sito orizzontale; sarà chiaro potersi considerare come applicate ad uno stesso corpo coteste forze, che opponGonsi verticalmente: cioè la forza *premente il fondo del vase*, e l' *elevatrice delle di lui pareti*. Dunque la differenza di tali forze sarà quella, che sentirete gravarvi la mano, quando sosterrete il vaso nel fondo, o lo impugnerete nel vertice: ed ella sarà puranche quell' effettiva forza, che farà peso sulla coppa di *Fig.* 35. *n.* 1.

O 2 una

una bilancia, o su di un'altro piano orizzontale, cui farete combaciare il fondo dello stesso vase. E di quì, cred'io potervisi dileguar que' dubbj, o quelle apparenti contraddizioni, che forse in leggendo il §. 22. v'ingombrarono la mente.

PROP. IV. TEOR.

§. 34. *Un Solido, che s'immerge in un liquore omogeneo stagnante, vien sospinto verticalmente dal fluido con tanta forza, quanto è il peso di esso fluido di mole uguale al Solido.*

Fig. 36. Dim. Dal punto C della superficie del Solido ACB, ch'è immerso nel fluido XVZY (a), si tiri entro di esso la verticale CE, per cui si distenda un piano, che formi nel Solido la sezione ACB. Nel perimetro di questa curva si prenda l'archetto Pp infinitesimo, da' di cui estremi P, e p si conducano le rette verticali PM, pm in sino al livello MN del fluido, e le PK, pk perpendicolari alla CE, che protratte incontri-

(a) Questa costruzione tende a condurre dentro la curva ACB delle rette orizzontali, che vi tronchino archetti infinitesimi: e che quei del ramo AC della stessa curva sieno uguali in numero agli altri dell' altro ramo BC.

trino in Q, e q il ramo CQB della divisata curva. Inoltre nel piano ACB si erga da P la PR perpendicolare all' archetto Pp, la qual' esprima la pressione fatta dal fluido sull' elemento Pp della curva: e distese le rette MP, QP fuori la curva ACB, si compia il rettangolo PSRs.

Ciò posto, la forza RP, con cui il fluido preme l'archetto Pp, è equivalente alle sue laterali sP, SP, di cui la prima è orizzontalmente diretta per sP, e l'altra verticalmente per SP: dunque una tal forza premente sarà all' orizzontale per sP, come RP ad sP; o (pe' triangoli simili PRs, PpF) come Pp a pF, o come Pp in PM a pF in PM. Ma, posta la densità del fluido uguale ad 1, il rettangolo di Pp in PM dinota l'effettiva forza, onde il fluido preme l'archetto Pp (25). Dunque l'altro rettangolo di pF in PM dovrà esprimere la spinta orizzontale fatta dal fluido per sP. E dimostrando in simil guisa, che l'altra spinta orizzontale, recata dal fluido all' elemento Qq della curva per la direzione vQ, sia quanto il rettangolo di qG in QN; sarà manifesto doversi pareggiare coteste spinte orizzontali, come quelle, che dagli uguali rettangoli di pF in PM, e di qG in QN son dinotate. Ma esse sono altresì opposte fra loro; conciossiachè la prima è diretta per sP, e l'altra per uQ; e poi la curva ACB supponesi continua, e rigida. Dunque queste spinte orizzontali si distruggeranno, e sol ne rimaranno le verticali S P, V Q applicate a' punti P, e Q degli archetti P p, Q q.

E poichè sta R P ad S P, come P p a PF, o come Pp in P M a PF in P M: e Pp in PM dinota la (25) pressione normale, che fa il fluido sull'elemento P p della curva; sarà PF in PM il valore di quella forza, onde verticalmente sospingesi dal fluido lo stesso elemento della curva. Ma l'elemento H h della base di questa curva n'è dallo stesso fluido gravato verticalmente con una forza rappresentata (26) dal rettangolo M m h H: dunque la differenza de' rettangoli di P F in P M, e di H h in H M, cioè il rettangolo P H h F dovrà dinotare l'effettiva forza, colla quale n'è verticalmente sospinta dal fluido la particella P p della curva A C B. E dimostrando la stessa cosa per ogni altro elemento della curva A C B, e per ogni altra sezione dell'intero solido immerso nel fluido; dovrà concludersi, che la forza totale, con cui verticalmente sospingesi dal fluido cotesto Solido, sia quanto il volume di questo nella densità di quello, che si è posta uguale ad 1: cioè quanto il peso del fluido contenuto nel volume del Solido. C. B. D.

§. 35. Scol. In questo Teorema ho solamente considerata la forza, onde un liquore omogeneo stagnante spigne all'insù quel Solido, che vi s'immerge: e non vi ho tenuto conto della gravità dello stesso Solido, la quale opponesi verticalmente a quella forza elevatrice. Dunque è di bene, che nel Teorema seguente io ne combini coteste forze, e che vi mostri la tendenza, e'l sito de' Solidi mersi ne' liquori, qualunque siane la specifica gravità di questi, e di quelli.

PROP. V. TEOR.

§. 36. *Un Solido specificamente più grave di quel Fluido, ov'è immerso, cerca di scendervi coll'eccesso del suo peso su quello del Fluido d'altrettanta mole.*

Ed un Solido specificamente più lieve di quel Fluido, ov'è demerso, n'è verticalmente sospinto da una forza uguale alla differenza del suo peso, e di quello del Fluido di altrettanto volume.

E ciascun di questi Solidi andrà per diritto senza rotolare, o barcollare, se il suo centro di gravità cada su quello della sua figura, o giacciano questi punti in una stessa verticale.

Dim. Le dimostrazioni della I. e della II. Parte di questo Teorema traggonsi immediata-tamente da ciò, che vi ho dimostrato nell' antecedente Proposiz.

Part. III. L'intero peso di tal Solido può intendersi raccolto nel di lui centro di gravità, come se fosse una sola forza, che quivi spignesse la di lui massa all'ingiù verticalmente (203 Stat.). E la forza, ond' ei n'è sospinto dal Fluido ov'è immerso, può intendersi (202 Stat.) riunita nel centro della sua figura. Dunque se il centro di gravità del Solido, e 'l centro della di lui figura si ritrovino in una stessa linea verticale; in questa retta dovran puranche trovarsi le direzioni di quelle due forze verticalmente opposte: e quindi il Solido colla differenza loro dovrà verticalmente calar nel Fluido, o sublimarvisi senza mica rotolare, o barcollare. E vi si desteranno questi moti di rotolamento, o di trepidazione, se que' due centri non cadano in una stessa retta verticale. C. B. D.

§. 37. **Cor. I.** Dalla I. e II. Parte di questo Teorema potrete intendere quali sieno que' corpi solidi, che posti nell'acqua, o in un'altro Fluido omogeneo, vi si sommergono interamente, onde van poi al fondo: e quali quegli altri, che vi galleggiano, sicchè spinti per forza verso del fondo ritornino a galla, reggendosi con una parte del loro volume eminente sul livello dell' acqua, e coll' altra quivi demersa.

§. 38. **Cor. II.** Di più *un Solido specificamente più grave di quel liquore, ov' è immerso, dee perdervi tanto peso, quanto ne avrebbe il Fluido entro al suo volume.*

§. 39. **Cor. III.** E l'intero peso di tal Solido sta a quella parte di peso, ch'ei vi perde nel Fluido, come la gravità specifica di esso Solido a quella del Fluido.

§. 40. **Cor. IV.** *E se lo stesso Solido si va successivamente mergendo in diversi liquori, di ciascun de' quali sia in ispecie più grave; le parti del suo peso, che vi perde, saranno come le gravità specifiche de' liquori.*

§. 41. **Cor. V.** *Un Solido, ch' è in ispecie men grave del Fluido ove s'immerga, non può ridursi alla quiete, se non vi galleggi, e soprannuoti in modo, che l'intero suo peso adegui quello del Fluido contenuto sotto la sua parte demersagli.*

§. 42. **Cor. VI.** È quindi l'intero peso del Solido, che si va successivamente mergendo in più Fluidi, de' quali sia in ispecie men grave, dee pareggiare il peso di ciascuno di essi contenuto nel volume della parte demersagli. *E le parti, ch' esso Solido tien demerse in tali Fluidi, saranno inversamente come le gravità specifiche di questi.*

§. 43. **Cor. VII.** Ogni corpo, che si può intender ser generato da una figura piana rivolta intorno al di lei asse, se abbia la sua materia ugualmente ripartita pe 'l volume, dovrà coll'asse verticale galleggiare in un Fluido di esso più leggiero.

§. 44. Cor. VIII. *Un Solido, che galleggi in un Fluido, dee prendervi tal sito, che l'intero suo volume stia al volume della parte demersa nel Fluido, come la gravità specifica del Fluido a quella del Solido; e che la retta congiungente il centro di gravità del solido col centro della parte del di lui volume demersa nel Fluido sia verticale* (a).

§. 45. Cor. IX. Ogni corpo specificamente più grave dell'acqua può rendersi un di lei galleggiante, sol che si faccia un voto dentro di esso, sicchè l'acqua contenuta nel suo intero volume abbia maggior peso di questo Solido scavato. E quindi sebbene l'oro sia uno de' più ponderosi corpi de' tre Regni della Natura; pur non di meno può formarsi un vaso d'oro colle pareti sì tenui, ch'ei di molto soprannuoti non pur all'acqua, ma benanche all'olio, ed allo spirito di vino, che dell'acqua son più leggieri. Ed anche l'acqua, ch'è ottocento volte più

(a) Il Problema di ritrovare il sito, che debb' avere in un Fluido stagnante un di lui galleggiante, che abbia una data figura, è di difficile soluzione: sebbene non paja esser tale.

più densa dell'aer nostro, ne diventa un di lui galleggiante, tosto che si trasforma in vapori vescicolari, i quali, come il sapete, sono esilissimi globettini d'acqua formativi dal calore.

§. 46. Scol. I. Ma prima, ch'io vi dimostri l'uso di queste verità idrostatiche, voglio recarvi una bellissima dottrina del Cav. Newton trascritta dal Cor. 5. Prop. XX. Lib. II. Princ. Mat. *Corporum igitur in Fluidis constitutorum duplex est gravitas: altera vera, & absoluta, altera apparens, vulgaris, & comparativa. Gravitas absoluta est vis tota qua corpus deorsum tendit: relativa & vulgaris est excessus gravitatis, quo corpus magis tendit deorsum, quam Fluidum ambiens* . . . . . Ed altrove nello stesso Coroll. *Quæ in aere sunt, & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant, gravia judicat, quatenns ab aeris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt, quam excessus verorum ponderum supra pondus aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, aerique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparative levia sunt non vere, quia descendunt in vacuo.*

§. 47. Scol. II. Ne' Corollarj di questo Teorema ascondonsi que' principj, onde gli Artefici sogliono costruire varie macchinette idrostatiche, adattate a valutare le gravità spe-

specifiche de' liquori. La prima di esse, che dicesi *Bilancia Idrostatica*, è una leva di uguali braccia, ad un estremo della quale pende una coppa con de' piccioli pesi, che nell'aria equilibransi con un globo di argento, o di piombo pendente con un sottilissimo filo dall'altro estremo della leva. E quindi se questo globo si merga in un liquore men grave di esso, e vi si riduca ad equilibrio con quella coppa, lo che si esegue sgravandola di una parte de' di lei pesi; *sarà questa parte uguale al peso del liquore* (38) *contenuto nel volume del globo* (*a*).

L'altra di coteste macchine, che dicesi *Pe-*

(a) *Gravità Specifiche di varj corpi, cioè dell'*

Oro	100.	Acciaio	45	Marmo	21
Mercurio	$71\frac{1}{2}$	Ferro	42	Pietra	14
Piombo	$60\frac{1}{2}$	Stagno	39	Solfo	$12\frac{1}{2}$
Argento	$54\frac{1}{2}$	Stagno puro	$38\frac{1}{4}$	Cera	5
Ottone	$47\frac{1}{3}$	Calamita	26	Acqua	$5\frac{1}{3}$

Un palmo cubico d'	*Pesa Rotola,*	*Onc.*	*Trap.*
Acqua Piovana	20.	13.	16.
Acqua de' Fonti	20.	17.	24.
Acqua del Sebeto	20.	22.	2.
Acqua marina	20.	28.	14.

Pesaliquori o *Areometro*, è la guastadetta DMN col suo collo DM lungo, ben diritto, e convenevolmente graduato, che in cima è chiusa ermeticamente, ed ha in fondo il globetto M con del mercurio, per mantenersi ritta in quel Fluido, ove si merge. Ciascun numero *a*, *b*, *c*, &c, ch'è segnato nel collo di tal macchina, dinota il peso di essa, e quell'altro, di che l'Artefice la dovè caricare per farla restare immersa in un Fluido della densità A sino a quel punto. Or se questo Areometro si merga in un Fluido della densità X, facendovisi reggere verticalmente col suo globo all'ingiù, e 'l livello Ff di esso Fluido corrisponda al punto *f* della di lei graduazione: *sarà la gravità specifica del Fluido* X *uguale alla parte* *a*:*f* *di quella del Fluido* A. Imperocchè la Guastadetta DMN ne tien demersa nel Fluido X la sua parte NMf: laddove nel Fluido A v' immergeva l'altra sua parte NMa. Dunque sarà la gravità specifica del Fluido X a quella dell'altro A, come NMa ad NMf (42), o come il peso del Fluido A contenuto nel volume NMa al peso dello stesso Fluido A contenuto in NMF, cioè (per costruzione) come *a* ad *f* (41.). Dunque la gravità specifica del Fluido X sarà uguale alla parte *a*:*f* di quella del Fluido A. Ed in tal modo colla Bilancia Idrostatica, o col Pesa- *Fig. 34.*

li-

liquori si conoscono, e si ragguagliano le gravità specifiche de' Fluidi.

PROP. VI. TEOR.

§. 48. *Le pareti del Tubolino* baef, *annesso al vase* XVZY *pieno d' acqua stagnante in sino ad* XY, *ricevono dalla pression dell' acqua quella distensione, ch' esse ne avrebbero,* Fig. 33. *se dispiegate nella forma rettangolare* BAEF *si facciano stirar per dritto da un peso uguale a quello di un prisma d' acqua, il quale abbia per base il rettangolo generatore del Tubolino, e per altezza la distanza di esso Tubolino dal livello dell' acqua.*

Dim. Il rettangolo BAEF, in che si è dispiegato il Tubolino *baef*, intendasi sospeso verticalmente, e gravato in mezzo alla sua base da un peso p, capace di produrvi la distensione BNMF uguale all' altra *tnmr*, che dalla pressione dell' acqua si arreca al Tubolino baef: e si chiami P questa pressione. Sarà chiaro dover essere il momento del peso p, quanto il momento della forza premente P: e quindi sarà il prodotto del peso p nello spazietto AN, ch' egli ha dovuto descrivere in producendo tale allungamento nella verga rettangolare, uguale al prodotto della

della forza P (premente le pareti del Tubolino) nello spazietto *an*, ch' ella ne descrive in dilatandole (*a*). Laonde per l' equalità di tali prodotti dovrà essere P : p :: AN : *an*.

E poichè le superficie cilindriche *tnmr*, *baef* si son supposte respettivamente uguali a' rettangoli BNMF, BAEF; sarà la differenza di quelle uguale alla differenza di queste: cioè *tnmr* — *baef* = BNMF — BAEF: e sarà pure la differenza delle periferie *nsm*, *ate* di quelle superficie cilindriche uguale alla differenza delle altezze BN, BA di questi rettangoli, cioè ad AN. Ma le periferie *nsm*, *ate* sono come i loro raggi *cn*, *ca*: dunque per la 19. El. V., dovrà essere *nsm* — *ate*, cioè *AN* ad *an*, come la periferia *nsm* al suo raggio *cn*, cioè come $\pi : \rho$: (dinotando per questi simboli il rapporto costante della circonferenza al raggio). Dunque, sostituendo questa ragione in luogo della seconda, che ho recata nell' analogia del §. precedente, sarà P : p :: $\pi : \rho$. Ma in questa ragione di π a ρ è pur anche il peso dell' acqua contenuta in un prisma, la cui base è uguale alla superficie cilindrica *baef*, e l' altezza quanto *bY*, al peso

P dello

(a) Ciò può intendersi da quel che diffusamente vi ho detto nella Statica, e particolarmente nel §. 190. di tale Scienza.

dello stesso liquore, che si conterrebbe in un'altro prisma avente per base il rettangolo generatore del Tubolino, e la stessa bY per altezza: imperciocchè questi pesi sarebbero come i loro volumi, li quali per esser due prismi della stessa altezza seguono la ragion delle loro basi, cioè della superficie del cilindro *b a e f* al rettangolo generatore di esso, cioè della periferia al raggio. Dunque sarà il peso del primo di questi prismi al peso dell'altro, come P a p. Ma P è uguale al peso (25) del primo de' divisati prismi: dunque sarà il peso p uguale a quello di un prisma d'acqua, la base del quale è quanto il rettangolo generatore del Tubolino, e l'altezza la distanza del Tubolino dal livello dell'acqua. E quindi sarà vero quel che ho proposto. C. B. D. (*a*).

§. 49. Cor. I. Di quì può calcolarsi la fermezza di un dato Tubolino annesso al fondo di un gran vase pieno d'acqua: e può anche antivedersi se abbiavi a succedere frattura nelle pareti di quello.

§. 50. Cor. II. Dalla dimostrazione di questo

(a) In questa Proposizione ho tacitamente supposto, che il diametro del Tubolino sia picciolissimo rispetto alla di lui distanza dal livello dell'acqua; affinchè ogni punto della di lui superficie fosse ugualmente distante dallo stesso livello.

sto Teorema si potrebbe una verità della Statica derivare: ed è *che la resistenza di una catena di ferro curvata in cerchio sta alla resistenza, ch' ella ne oppone strappata per diritto, come la periferia al raggio.*

§. 51. Scol. Da questi principj è agevole il calcolar le resistenze, che le catene di ferro oppongono alle spinte di una Cupola ruinante, ch'esse ne accerchiano. In fatti (per mostrarvelo col seguente esemplo) la più alta di quelle due catene di ferro, che cingono la Cupola di S. Pietro in Roma, è di diam. poll. $2\frac{1}{2}$. Dunque la sua resistenza assoluta, o la renitenza ad essere strappata per dritto, dovrà montare a 375000. libbre. Imperocchè si sa per esperienza, che un filo di ferro del diametro $\frac{1}{10}$ poll. Ren. arriva a sostenere 450 lib. d'Olanda (*a*), cioè 600. di Roma: e le resistenze de' fili si possono supporre crescere in duplicata ragione de' diametri di essi (*b*). Quindi è, che facendosi come $\frac{1}{100}$ a $\frac{25}{4}$, così 600 ad un quarto, questo sarà 375000. Per la qual cosa dovendo esser questa resistenza, a quella ch' emerge nella stessa catena curvata in

P 2

(a) Not. §. 256. Stat.

(b) Questa supposizione vi si è introdotta per economìa del calcolo: imperocchè dalle sperienze del Musschenbroek si rileva esser le resistenze de' fili di ferro in minor ragione delle grossezze di essi.

in cerchio, come il raggio alla circonferenza, troverassi la resistenza di questa catena esser più di 2200000. libbre Romane.

CAP. III.

PRENOZIONI SULL' ARIA.

§. 52. Quel fluido trasparentissimo, che cinge la nostra Terra, e che da noi si respira, dicesi *Aere atmosferico*, o *Atmosfera terrestre*: ed ogni sua parte *Aria* volgarmente si domanda. Egli a similitudine degli altri fluidi, su i quali possiamo fare delle sperienze, è fornito di una somma cedevolezza, e di una certa gravità specifica: ed è poi singularmente animato da un elatere, che sebbene in ogni sua parte intimamente risegga, e per ogni verso si dispieghi; pur non dimeno la di lui forza cresce, e si rimette a proporzion del calore, che ne penetra una tal parte, e del peso che la comprime. Ma perchè di tali cose io vene ragioni per iscienza, è di bene premetterne que' principj intuitivi, che sono come loro Assiomi: mostrandovi le sperienze, e 'l modo, ond' essi si son carpiti dalla Natura.

Sag-

Saggio delle Macchine, onde producesi il Voto Boileano, e 'l Torricelliano.

§. 53. Quantunque le Macchine Pneumatiche, o Boileane sieno tra se diverse sì nella struttura, che nella perfezione loro; pure i pezzi, ch' essenzialmente appartengono a ciascuna di esse, possono ridursi a' seguenti: che sono *la Tromba guernita del suo stantuffo*: *le sue Valvole*: e *'l Recipiente, donde vuol estrarsi l' aria*.

La *Tromba*, ch' è un immobile cilindro voto al di dentro, e ben saldo nelle sue pareti; ha uno stantuffo a guisa di *siringa*, il quale nel deprimersi dalla bocca del cilindro al di lui fondo, e nel tirarsi all' insù tien sempre la sua parte convessa sì ben combaciante colla cavità del cilindro, che l' aria non vi può in verun modo trapelare.

Il *Recipiente* è una Campana di cristallo posta verticalmente su di un piattino d' ottone, combaciandovi col suo orlo. Al di sotto del piattino evvi un picciol tubo d' ottone fortemente saldato al di lui piano, ed al fondo della Tromba; sicchè per mezzo di questo tubolino la cavità del Recipiente ne comunichi con quella della Tromba.

Finalmente su quell' orificio del tubolino, ch' è al fondo della Tromba, vi sta adattata una *Valvola*, detta da' Toscani *Animella*, che apresi al di dentro della stessa Tromba: e

P 3 nelle

nelle di lei pareti avvene un' altra ; che apresi al di fuori.

Or da ciò si rileva, che, tirandosi all' insù lo stantuffo, debba restar vota d' aria quella parte della Tromba, ch' egli ne ha trascorso: e che l' aria contenuta nel Recipiente, e nel tubolino debba in virtù del suo elatere aprir quella Valvola, ch' è al fondo della Tromba, e spandersi in quel voto, restandone diradata nel Recipiente. E se lo stantuffo poi si deprima, dovrà chiudersi quella Valvola, ch' è al fondo della Tromba, ed aprirsi quell' altra, che ne sta sulle pareti: per la quale resterà espulsa quell' aria, ch' erasi intrusa nella Tromba. Che se di bel nuovo si tiri lo stantuffo dal fondo della Tromba, vi si farà benanche un voto nella cavità di questa, ove in simil guisa diffonderassi l' aria del Recipiente, e del tubolino, e resterà vie maggiormente diradata quella della Campana. Ed in tal modo continuandosi le vicendevoli depressioni, ed elevazioni dello stantuffo, le quali soglionsi dire *agitazioni dello stantuffo*, o *colpi dell' embolo*, si verrà a render molto rara l' aria del Recipiente (a).

§. 54.

(a) Nelle prime Macchine Pneumatiche in luogo delle due valvole adattate alla tromba, vi era una chiavetta posta nel tubolino, la quale dalla mano dell' uomo doveasi aprire, quando dal fondo della tromba si tirava lo

§. 54. Un Tubolino di cristallo, perfettamente dritto, ugualmente calibrato, lungo poco men che 3. piedi, e di 2. lin. in circa di diametro, si suggelli ermeticamente nel suo orificio inferiore, e per l'altro superiore si riempia di mercurio liberato d' aria. Si chiuda col dito quest' orificio superiore, e capovolto il tubolino, immergasi destramente in una cisternetta, ove siavi del mercurio: e poi si tolga il dito, che ne chiudeva un tal foro. Vedrassi una parte del mercurio del tubolino scender di repente nella cisternetta, e la rimanente parte reggervi all' altezza di circa 28. poll. sul livello del mercurio di essa cisternetta.

Questa Macchinetta dicesi volgarmente *Baroscopio*, o *Barometro*, e dal suo Autore Evangelista Torricelli suol dirsi *Tubo Torricelliano*. Quella parte del tubolino vota di mercurio, ch' è altresì sgombra d' aria naturale, suol dirsi *Voto Torricelliano*, o *Barometrico*, che del Boileano è assai più perfetto. E l' altezza del Mercurio nel tubolino dicesi *Altezza Barometrica*.

§. 55. PRINC. I. *Un piè cubo di quell' aria*, *ch' è*

P 4

lo stantuffo, ed al deprimersi di questo ella si dovea chiudere; affinchè nel primo caso l' aria del recipiente avesse potuto diffondersi nella Tromba, e nel secondo caso l' aria della Tromba ne foss' escita al di fuori.

ch' è nelle vicinanze della nostra Terra, pesa un pò più di 1.$\frac{1}{2}$ *oncia*.

Si è più volte con esattissime bilance rilevato, che un globo di cristallo, o altro vaso rigido nelle sue pareti, abbia minor peso quando è voto d' aria, che quando d' aria n' è ripieno. Dunque la differenza di tali pesi è quanto il peso dell' aria naturale contenuta nel globo, o nel vaso. E quindi colla sola regola aurea si è calcolato il peso di un piè cubo d' aria naturale, che a un di presso si è trovato ascendere ad 1.$\frac{1}{2}$ oncia (*a*).

(a) Aristotile fin da' tempi suoi opinò esser grave l' aria, che respiriamo: imperciocchè, com' ei diceva, un otre enfiato sperimentasi più ponderoso, che quando è afflosciato: e ciò a misura dell' aria, che soffiando vi s' introduce. Ma un tale sperimento non è, che fallace, e la gravità specifica dell' aria, che in tal modo si ritrae, è assai minore di quella, ch' esser dee: ed eccone la ragione. Il peso di una vescica enfiata, è uguale al peso della materia, da cui ella si compone, ed al peso dell' aria ivi rinchiusa, meno la forza elevatrice impressa dall' aria esterna alla vescica (36). Or cotesta forza elevatrice è quanto il peso dell' aria esterna, che si conterrebbe nel volume della vescica enfiata (34): la qual aria è un pò meno di quella, che soffiando nella vescica vi si è addensata. Dunque l' effettivo peso della vescica enfiata sarà uguale al peso della sola vescica, ed a quell' altro picciol peso, che vi si è prodotto rendendone quest' aria più densa dell' esterna. E quindi perchè senza fallacia s' instituisca tale sperimento, convien che il vaso rimanga dello stesso volume, quando se ne cacci quella, che v' era dentro, e quando altrettanta vi s' introduca.

§. 56. Princ. II. *La densità media* (*a*) *dell' aria, ch' è al lido del mare, sta alla densità dell' acqua, come* 1 *ad* 800.

Ciò si trae dalle sperienze sagacemente dal Dottor Musschenbroek istituite.

§. 57. Princ. III. *La pressione, che in un dato luogo fa l' Atmosfera su di un piano, è quanto il peso del mercurio contenuto in un prisma, che abbia per base quel piano, e per altezza l' Altezza Barometrica corrispondente ad esso luogo. Onde le pressioni fatte dall' Atmosfera su piani uguali saranno, come le corrispondenti Altezze Barometriche*.

Queste verità nascono dalla sperienza recatavi quì sopra (54), che la gravità di tutta l' aria equiponderi a 28. poll. di mercurio a un di presso, o a 32. piedi d' acqua.

§. 58. Princ. IV. *L' elasticità di un dato volume d' aria dirigesi per ogni verso, ed è proporzionale alla forza, che la comprime, ed a quel grado di calore, ch' ella contiene*.

Il conato espansivo, che destasi in una massa d' aria in virtù della forza, che la comprime, è proporzionale all' intensità di essa forza. Ma il calor di cotest' aria cercan-

(a) La densità dell' aria, che non sia nè troppo fredda, nè troppo calda, dicesi *media*.

cando di dilatarla a misura di quel grado, ch' ei vi tiene, ne genera un simigliante conato. Dunque da questo duplice principio dee nascere in tal aria un' elasticità proporzionale alla forza, che la comprime, ed al calore, onde tal aria n' è penetrata.

§. 59. Cor. I. Dunque l' elasticità di due masse d' aria uguali, e da un medesimo calore penetrate, saranno come le respettive forze, che le comprimono.

§. 60. Cor. II. E se le forze comprimenti queste due arie sieno uguali; l' elasticità di queste saranno come i gradi di calore, che contengono: supposto che il calore non abbia ingrandito il volume di ciascheduna.

§. 61. Cor. III. La forza, che comprime una massa d' aria, o è il peso di quella colonna d' aria, che a tal massa ne sovrasti, o è il peso di un altro corpo sia solido, sia fluido, da cui quella massa ne sia gravata.

§. 62. Princ. V. *La densità dell' aria è quasi proporzionale alla forza comprimente.*

Questa Ipotesi che a *priori* vedesi concorde al vero, è stata pur anche con varie sperienze dimostrata dal Boile, dal Mariotte, dall' Amontons, da' Bernulli, dal Marchese Poleni, e da altri Valentuomini; una delle quali è la seguente, ch' io vi rapporto colle stesse parole del Mariotte, che l' istituì

sagacemente. *Molte esperienze fanno vedere, che la condensazione dell' aria si fa in ragione del peso, di cui ella è caricata: eccone una assai facile. Prendasi un cannello di vetro ricurvo ABC chiuso in C, ed aperto in A; vi si versi un poco di mercurio fino all' altezza orizzontale DE, affinchè l' aria rinchiusa CE non sia nè meno nè più dilatata di quella, che è nell' altro braccio: perchè se il mercurio fosse un poco più alto in un braccio, che nell' altro, l' aria sarebbe in questo più premuta. Bisogna, che l' altezza EC sia mediocre, per esempio, di 12 pollici, come si è supposto in questa figura, e l' altra AD sia alta quanto si può averla. Essendo dunque il mercurio dall' una, e dall' altra parte alla stessa altezza verso D, ed E, e non essendovi più comunicazione tra l' aria EG, e DA, si versi dalla apertura A con un piccolo imbuto di vetro, altro mercurio; procurando che non entri aria nello spazio CE, si vedrà salire il mercurio a poco a poco verso C, e condensarsi l' aria, che era in CE; e se EF è 6 pollici, essendo FG una linea orizzontale, il mercurio sarà salito nell' altro braccio fino al punto H, lontano 28. pollici dal punto G, se siano allora i barometri all' altezza di 28. pollici nel luogo dell' osservazione; perchè se fussero a 27 ½, anco GH sarebbe solamente 27 pollici e mezzo. In questo stato adunque l' aria in FC è premuta dal peso dell' atmosfera, che si suppone eguale a quello di 28.* Fig. 40. n. 2.

pollici di mercurio, e dal peso ancora de' 28. pollici, che sono nello spazio GH; e per conseguenza ell' è caricata da un peso doppio di quello da cui è caricata l' aria, che trovasi nel luogo, ove si fa l' esperienza, e che è simile a quella, che era iu EC avanti di essere condensata dal peso del mercurio GH. Si vedrà dunque manifestamente da questa esperienza, che l' aria EC si sarà condensata in proporzione del peso. Su di che potete leggere, ciò che ha dimostrato Ermanno nella sua Foronomia. Lib. II. §. 348.

§. 63. Scol. Se vogliasi adottare l' ipotesi Leibniziana, che *la nostra aria sia un composto di una materia compressibile, e di un' altra incompressibile*; le densità dell' aria non saranno come le forze, che la comprimono, ma in un' altra ragione.

§. 64. Princ. VI. *Se una massa d' aria premuta dal peso P acquisti il volume V, e la stessa massa caricata dal peso* p *restringasi nel volume* v; *sarà PV uguale a* pv.

Imperocchè i pesi P, e p son proporzionali alle densità, ch' essi respettivamente producono in quella data massa d' aria. Ma queste densità sono inversamente come i volumi, ch' ella ne acquista. Dunque sarà P : p :: v : V, e quindi PV = pv.

§. 65. Princ. VII. *L' aria naturale, che si contiene in un vase rigido ben chiuso, se faccia-*

si penetrare dal calore dell' acqua bollente; dee acquistare un terzo di più della sua elasticità naturale. E se le pareti del vaso in forza di un tal calore si distendano, o l' aria vi si spanda; l' elasticità di quest' aria dilatata starà alla di lei elasticità nello stato di restrizione, come questo volume a quello.

La prima parte di questa proposizione traesi dalle accurate sperienze fatte sull' aria dall' Amontons Memoir. de l' Acc. de. Sc. an. 1699: e la seconda può dimostrarsi facilmente dal principio anteriore. Ma intanto giova, che intendiate alcune verità interessanti rapportate dallo stesso Scrittore.

1.° *Il calore penetra con indicibile forza, e prestezza una massa d' aria.*

2.° *L' aria penetrata dal calore cresce di volume, s' è in grado di rarefarsi: e se non possa rarefarsi accresce la sua molla.*

3.° *L' aria penetrata dal calore dell' acqua bollente, se abbia libertà di spandersi crescerà di un terzo nel volume, e se mai non possa dilatarsi, crescerà di un terzo nella sua molla*; cosicchè se nello stato naturale sosteneva il peso di 27. poll. di mercurio, penetrata dal calore dell' acqua bollente ne sosterrà 36.

4.° *L' aria ristretta nel volume v se acquisti l' elasticità* m, *quando è penetrata dal calore* c: *dilatandosi nel volume V avrà l' elatere* (mv): V. Leggete il Princ. VI.

5.° *Il calore dell' acqua bollente, quello, che* *ha l' aria ne' massimi caldi estivi di Pietroburgo, e quell' altro del più rigido verno, sono nella proporzione armonica di 6, 4, 3.*, come l' osservò accuratissimamente Daniele Bernulli.

CAP. IV.

Ragionamento sulle densita' dell' aria, e sul di lei elatere.

PROP. VII. PROBL.

Fig. 37. §. 66. *Data la legge, onde variano le densità, e le forze acceleratrici di un fluido, che cingendo la sfera F β δ ne graviti al di lei centro, ritrovare la legge delle pressioni di esso fluido.*

Soluz. Un raggio qualunque GF di questa sfera protraggasi all' insù, finchè ne arrivi al supremo strato *A q a* di esso fluido. Di poi intorno a questa retta GA, come asse intendansi descritte in uno stesso piano le tre curve QRh, MNY, HIX, le prime delle quali sieno le respettive scale delle densità di esso fluido, e delle forze acceleratrici de' corrispondenti di lui strati (16. 17), e la terza sia quella delle loro gravità specifiche. Dico esser la pressione, che fa questo fluido su di un piano posto in D nel sito DT, a quella, ch' ei farebbe su tal piano posto in simil guisa nel luogo F, come l' aja ADLH all' altra AFXH.

Dim. Dal punto H si concepisca eretto verticalmente lo spazio cilindrico *AqfF*, che abbia per altezza la retta AF, e per base il cerchio di *Ff*. E quest' altezza sia divisa nelle particelle infinitesime, ed uguali AB, BC, &c., e pe' loro estremi vi sien condotti gli strati di fluido *bB*, *cC*, &c perpendicolari a GA, i quali segnino nelle riferite curve le ordinate RBN, SCO, &c. Sarà manifesto potersi considerare come omogenei i fluidi rinchiusi ne' cilindretti *ABRq*, *BCsR*, &c., ed aventi le densità BR, CS, &c. Dunque i rispettivi pesi di questi fluidi dovranno essere, come le masse contenute ne' cilindretti ABRq, BCsR, &c., e come le forze, che quivi le accelerano: cioè (per essere uguali cotesti cilindretti) come le densità (*a*) de' fluidi, che riempiono questi solidi, e come le divisate forze acceleratrici. Val quanto dire saran que' pesi, come le corrispondenti ordinate BI, CK, &c. nella scala HIX delle gravità specifiche del dato fluido, o come i rettangoletti ugualmente alti ABIH, BCKI, &c. Dunque la somma

(a) Leggete la nota (a) §. 13.

ma de' pesi de' cilindretti del fluido, che soprastando al cerchio di D δ lo gravano all'ingiù verso del centro della sfera, sta alla somma di questi altri cilindretti del fluido, che in simil modo ne premerebbero l'ugual cerchio di F f, come la somma de' rettangoletti iscritti nell' aja A D L H agl' iscritti nell' aja A F X H (*a*), cioè come l'aja A D L H all' altra A F X H (*b*).

§. 67. Cor. I. Se gli strati di questo fluido suppongansi animati da una stessa forza acceleratrice, lo che dee verificarsi, quando F A sia infinitesima rispetto a G F; la Scala delle gravità specifiche di questo fluido confonderassi colla Scala Q R h delle densità di esso (18). E quindi *le pressioni, che farà questo fluido* in D, ed F, *saranno proporzionali alle aje* A D T Q, A F h Q *nella Scala delle densità di tal liquore*.

§. 68. Cor. II. E quindi la differenza delle pressioni, che fa questo fluido ne' luoghi C, e D infinitamente tra loro vicini, sarà proporzionale alla differenza delle aje A C S Q, A D T Q, cioè all' aja C D T S.

§. 69. Cor. III. Dunque *l'equilibrio di questo fluido esige, che la differenza delle pressioni sofferte da due strati vicinissimi di esso sia proporzionale alla distanza loro, ed alla densità, che quivi ne tiene il fluido*.

(a) Prenoz. III.
(b) Prenoz. VIII. Mecc.

§. 70. Cor. IV. La pressione, che questo fluido eterogeneo esercita in F, suol valutarsi dall' altezza, alla quale si dovrebb' estollere un dato liquore omogeneo equilibrantesi con esso. Leggete quel, che altrove ho detto su tale argomento §. 21.

§. 71. Cor. V. E quindi se questo liquore omogeneo abbia l'altezza A, e la densità D, e sia δ la densità, che abbia in F il fluido cingente la sfera F $\beta\gamma$; sarà A. D : δ l'altezza, alla quale dovrebbe elevarsi un' altro fluido omogeneo della densità δ per produrvi in F un' ugual pressione. Imperocchè (21) dovrebbe stare δ a D, così A ad un quarto, ch' è per appunto A. D : δ.

§. 72. Cor. VI. Pongasi uguale ad 1 la la densità dell' aria atmosferica, ch'è a lido di mare; sarà quasi 800 quella dell' acqua (56). Ma la pressione dell'atmosfera trovasi equivalente al peso di una colonna d' acqua di 32 piè di altezza (57). Dunque le quantità δ, A, D, per la nostr' aria, e per l' acqua saranno respettivamente 1, 32, 800: e quindi sarà A. D : δ = 32. 800 : 1 = 25600.

§. 73. Cor. VI. Dunque *se la nostr' Atmosfera avesse da per tutto quella stessa densità, ch' ella tiene a lido di mare; la sua altezza sulla superficie terrestre dovrebbe montare a* 25600 *piedi parigini a un di presso*.

Q PROP.

PROP. VIII. TEOR.

§. 74. *In qualunque Ipotesi di accelerazione, se l'aria, che cinge la nostra Terra F β γ, sia da uno stesso calore penetrata, e le sue densità supponganzi proporzionali alle forze comprimenti; i log-mi delle densità, ch'ella tiene in due luoghi D, ed F della stessa verticale* AF, *saranno come le aje* ADPM, AFYM, *che troncansi nella Scala* MNY *delle forze centripete da que' luoghi fino alla cima Q A M dell' Atmosfera.* Fig. 37.

Dim. Intendasi fatta la stessa costruzione, che vi fu recata nel Probl. prec., e poi si descriva l'Iperbole conica *Z b g*, che abbia per assintoti le rette *F h*, *F G*, ed una qualunque potenza. E finalmente da' punti S, T, V, &c. si tirino le *Sd*, *Tb*, *VZ*, &c. parallele ad AFG, che ne incontrino il perimetro dell'Iperbole.

E poichè dall'Ipotesi le densità BR, CS, DT, &c. dell'aria son proporzionali alle forze comprimenti, cioè alle aje ABIH, ACKH, ADLH, &c. (*a*); saranno le differenze di quelle densità come le differenze di queste aje. Vale a dire le rette *Ss*, *Tt*, &c. saranno come le aje, BCKI, CDLK, &c., o come le loro basi, CK, DL, &c., o finalmente come i rettangoli di SC in CO, di TD in DP, &c, cui son proporzionali le CK, DL, &c (18).

(a) Leggete la conchiusione del prec. Probl.

Ciò posto, le retticciuole *Ss*, *Tt* sono come i rettangoli SCO, TDP, e quindi in ragion composta di SC a TD, e di CO a DP. Dunque (*a*) sarà CO a DP in ragion composta di *Ss* a *Tt*, e di TD ad SC. Ma i trapezietti iperbolici *fcdg*, *cabd* sono ancor essi in ragion composta di *fc* a *ca*, e di *cd* ad *ab*: e la prima di queste ragioni componenti è quanto quella di *Ss* a *Tt*, e l'altra (*b*) pareggia la ragione di *Fa* ad *Fc*, o di *TD* ad *SC*. Dunque gli spazietti iperbolici *fcdg*, *cabd* saranno in ragion composta di *Ss* a *Tt*, e di *TD* ad *SC*, cioè (da quel che ho dimostrato) nella ragione di CO a DP, o (*c*) del rettangoletto BCON all'altro CDPO. E potendovi dimostrare in simil guisa, che i rettangoletti iscritti nell'aja iperbolica *flZg* sieno proporzionali agli altrettanti loro corrispondenti, che sono iscritti nell'aja AEWM: e che lo stesso ne addivenga alle altre aje corrispondenti *fhmg*, *AFYM*; sarà (*d*) l'aja AEWM all'altra AFYM, come lo spazio iperbolico *flZg* allo spazio iper-

Q 2

(a) Pren. IV. Mecc.
(b) Cor. 2. Pr. XX. Lib. III. Con. Gian.
(c) Prop. I. El. VI.
(d) Prenoz. III.

iperbolico $fhmg$, cioè (a) come il log-mo di Fl al log-mo di Fh, o come il log-mo di E V all' altro di Fh (b). Dunque i log-mi delle densità atmosferiche EV, Fh saranno come le corrispondenti aje AEWM, AFYM nella scala delle forze centripete. C. B. D.

§. 75. Cor. I. Se il luogo A non istia nel supremo strato dell' Atmosfera, la di cui densità si è supposta uguale ad 1; sarà il log-mo della ragione delle densità in E a quella in A, al log-mo della ragione della densità in F a quella in A, come l' aja AEWM all' altra AFYM.

§. 76. Cor. II. Dunque *prendendo le aje* ABNM, ACOM, ADPM, &c. *in progressione aritmetica, le corrispondenti densità dell' aria, cioè le rette* BR, CS, DT, &c., *che le disegnano, saranno in progressione geometrica*.

§. 77. Cor. III. Da ciò, che si è dimostrato in questo Teorema, vedesi con chiarezza essere trascendente il rapporto tra le ordinate della Scala delle densità, e tra le corrispondenti aje nella Scala delle forze centripete.

§. 78. Scol. Questo nuovo Teorema mi è sembrato ben acconcio a dimostrarvi distin-

ta-

(a) Cor. 3. Prop. XXII. Lib. III. Con. Giann.
(b) Quì si suppone uguale ad 1 la densità del supremo strato dell' atmosfera.

tamente tutto ciò, che l' Immortal Newton con lunghi, e particolari raziocinj ha scritto su tale argomento nella Sez. V. Lib. II. Princ. Mat.

PROP. IX. TEOR.

§. 79. *Poste le medesime cose del Teorema prec.; se la Gravità sia costante, com' è nelle vicinanze di nostra Terra; la Scala* QRS *delle densità atmosferiche sarà una Logistica, convergente all' insù col di lei Assintoto verticale* AF. Fig. 39

Dim. Quando supponesi costante la gravità di un corpo, la Scala delle forze centripete (a) ne diviene una retta parallela al di lei asse. Dunque le aje ABNM, ACOM, AFYM, &c., che dianzi eran curvilinee, diverranno altrettanti rettangoli proporzionali alle loro basi AB, AC, AF, &c. (b). E quindi le AB, AC, AF, &c. saranno log-mi delle RB, SC, Fh, &c. (c) e la curva delle densità sarà una Logistica. C. B. D.

Q 3 PROP.

(a) Ciò traesi immediatamente dal §. 87. Mecc.
(b) Prop. I. El. VI.
(c) Prenoz. IV. n. 1.

PROP. X. PROBL.

§. 80. *Rilevare il metodo del Sig. Gio. Domenico Cassini nel misurare l' altezza del monte* B L S *per mezzo di un' esattissimo Barometro.*

Sol. I. Nel luogo F, che stia al lido del mare, o in un piano sottoposto al dato monte; si osservi l' altezza del mercurio in un' esattissimo Barometro, quivi verticalmente eretto. II.° Si trasporti il medesimo Barometro nella cima di una Torre, o di un' altro edificio, che stia benanche a lido di mare, o nello stesso piano sottoposto al monte, per esempio in C, e poi si prenda l' altezza del mercurio nel Barometro, e l' altezza C F dell' edificio. III.° Si elevi lo stesso Barometro nella vetta del monte proposto, cioè in B, e si osservi la depressione del mercurio in tal luogo. IV.° Finalmente facciasi, come il log-mo della ragione dell' altezza Barometrica in F a quella in C, al log-mo della ragione dell' altezza Barometrica in F a quella in B, così C F ad un quarto; questo *sarà l' altezza* F B *del dato monte.*

Dim. Imperciocchè la retta F C sta all' altra F B, come il log-mo della ragione di F h a C S al log-mo della ragione di F h a B R (79). Ma le densità dell' atmosfera ne' luoghi F, e B sono come le forze, che qui-

vi

vi la comprimono: cioè come le corrispondenti altezze Barometriche (57.). Dunque sarà F C ad F B come il log-mo della ragione delle altezze Barometriche in F, e C al log-mo della ragione delle altezze Barometriche in F, e B. E quindi colla regola aurea si potrà dall' altezza della Torre, o dell' edificio ricavar quella del monte. C.B.F.

PROP. XI. TEOR.

§. 81. *Quando la Gravità è come la distanza dal centro* C *della Terra; le densità atmosferiche ne' luoghi* A, B, F, K, &c. *saranno geometricamente proporzionali, se i quadrati delle distanze di essi dal centro della Terra, cioè i quadrati delle* CA, CB, CF, CK, &c. *sieno aritmeticamente proporzionali.* *Fig.40. n. 1.*

Dim. La linea Q R h sia la Scala delle densità atmosferiche, e l' altra M N C quella delle gravità terrestri; sarà questa linea una retta condotta per lo centro C della nostra Terra (*a*). E poichè i quadrati delle rette C A, C B, C F, C K, &c. suppongonsi aritmeticamente proporzionali, anche i triangoli C A M, C B N, C F Y, C K L, &c., che so-

Q 4 no

(a) Questa è una conseguenza immediata del §. 87. Mecc.

no in duplicata ragione di esse, saran tali: e saran pure aritmeticamente proporzionali i trapezj ABNM, AFYM, AKLM, &c. (*a*). Dunque le densità ne' luoghi A,B,F,K, &c. saranno in continua proporzione. C. B. D.

PROP. XII. TEOR.

§. 82. *Se la Gravità decresca come il quadrato della distanza dal centro di nostra Terra; prese le distanze da questo centro in proporzione armonica, le corrispondenti densità saranno geometricamente proporzionali.*

DIM. Sia la curva OMY la Scala delle gravità terrestri, la quale, per quello che si è det-
Fig.38. to nel §. I. dim. 171. Mecc., è un' Iperbole cubica rapportata agli assintoti rettangoli GN,GS. Per un punto di questa curva superiore all' atmosfera si distenda l' Iperbole conica OBK riferita a' medesimi assintoti GN, GS. Ed in fine condotta dal primo strato A a dell' Atmosfera la retta AM parallela a GS, si tiri dal punto B, ove ella incontri l' Iperbole conica,

(a) Quando più grandezze sono aritmeticamente proporzionali; le differenze di questi termini dal massimo, o i loro eccessi sul minimo saranno anche tali: e *viceversa*. Ciò rilevasi dalla dottrina delle progressioni.

nica, la BS parallela ad AG: e 'l resto intendasi eseguito come nella Prop. VIII.

E poichè il rettangolo di GN in AB è uguale ad NA . AB + GA . AB: ed è similmente l' altro rettangolo di GN in DH uguale ad ND . DH + GD . DH; sarà la differenza de' rettangoli di GN in TH, e di GN in AB, cioè il rettangolo di GN in CH, uguale alla differenza de' rettangoli di NA in AB, e di ND in DH, una colla differenza de' rettangoli di GA in AB, e di GD in DH. Ma la differenza de' rettangoli di GA in AB, e di GD in DH è zero (*a*). Dunque il rettangolo di GN in CH sarà uguale alla differenza de' rettangoli di NA in AB, e di ND in DH, cioè all' aja Iperbolica ADPM (*b*). E dimostrando in simil guisa, che l' altre aje Iperboliche AEWM, AFYM, &c. adeguino i rettangoli di GN in IK, di GN in RQ, &c; saranno le aje Iperboliche ADPM, AEWM, AFYM, &c. come i rettangoli di GN in GH, di GN in IK, di GN in RQ, &c.: cioè come le CH, IK, RQ, &c. (*c*). Dunque prese le CH, IK, RQ, &c. in progressione aritmetica, le densità corrispondenti a' luoghi D, E, F, &c. saranno geometricamente

(a) Prop. XX. Lib. III. Con. Giann.
(b) Prenoz. X. n. 1. Mecc.
(c) Prop. I. El. VI.

te proporzionali (76). Ma quando le CH, IK, RQ &c. sono aritmeticamente proporzionali, anche le intere DH, EK, FQ son tali, e le GD, GE, GF, &c. reciproche di queste sono in progressione armonica (*a*). Dunque sarà vero quel, che ho proposto C. B. D.

Fig. 37. §. 83. L'Illustre Newton soggiunse a queste Proposizioni uno Scolio ben lungo, che avea bisogno di esser dimostrato: onde parmi un dovere, ch'io ve lo dimostri. A tal uopo pongasi $GA = f$, $GD = x$, e la forza acceleratrice in D; cioè DP proporzionale ad $\frac{1}{x^n}$; sarà $AD = f - x$, $DC = -dx$, $CDPO = -\frac{dx}{x^n}$; e l'aja

ADPM

(a) Tre grandezze diconsi *armonicamente proporzionali*, se la prima di esse stia alla terza, come la differenza della prima e della seconda, alla differenza della seconda e della terza: come sarebbero i numeri 6, 4, 3. Ciò posto, *se s' invertano le grandezze* a, a + d, a + 2d *aritmeticamente proporzionali*, *o l' unità si divida per ciascuna di esse*; *i quoti* 1 : a, 1 : (a + d), 1 : (a + 2d) *saranno in proporzione armonica*. Cioè sarà $\frac{1}{a} : \frac{1}{a+2d} :: \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} : \frac{1}{a+d} - \frac{1}{a+2d}$. La qual cosa vedrassi chiaramente moltiplicando gli estremi termini, ed i medj di quest' analogìa: e si potrà un tal Teorema estendere alle progressioni aritmetiche.

$$ADPM = -\int \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$$

Or determinando la costante C dal supporsi, che l'aja ADMP svanisca, quando GD adegui GA, cioè x diventi f; sarà

$$ADPM = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{f^{n-1}}\right)$$

cioè a dire quando la gravità decresce, come la potenza *n* della distanza dal centro, le aje ADPM, AEWM, AFYM saranno come

$$\frac{1}{GD^{n-1}} - \frac{1}{GA^{n-1}},\ \frac{1}{GE^{n-1}} - \frac{1}{GA^{n-1}},\ \frac{1}{GF^{n-1}} - \frac{1}{GA^{n-1}}$$

respettivamente.

Con che prendendo le aje ADPM, AEWM, AFYM, &c. aritmeticamente proporzionali, le grandezze $\frac{1}{GD^{n-1}}$, $\frac{1}{GE^{n-1}}$, $\frac{1}{GF^{n-1}}$, &c. saranno *equidifferenti* (*a*): e saranno in progressione geometrica le densità dell'aria (76), che corrispondono ai luoghi D, E, F, &c. Ed ecco un general Teorema, donde resta dimostrato, quanto particolarmente in esso Scolio ne ha rammassato il Newton (*b*). *Se la*

(a) Vedi la not. (a) §. 81.

(b) *Simili argumentatione probari potest* (ecco le parole del Newton), *quod si gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum & reciproce qua-*

la gravità decresca come le potenze n delle distanze; prendendo in progressione aritmetica le inverse delle potenze n — 1 di esse distanze; le corrispondenti densità dell' aria saranno geometricamente proporzionali.

PROP. XIII. PROBL.

§. 84. *Data la legge, onde il calore penetra diversi strati dell' Atmosfera terrestre, calcolarne le pressioni loro.*

Fig.37. SOLUZ. Intorno alla verticale A G, come asse, intendansi descritte in uno stesso piano le tre curve Q R V, H I L, M N P, la prima delle quali sia la scala dell' elasticità dell' aria, o delle di lei pressioni (58), la se-

quadratorum, nempe $GF^3 : GF^2, GF^3 : GE^2, GF^3 : GD^2$, *sumantur in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & reciproca cuborum distantiarum sumantur in progressione Arithmetica, nempe* $GF^4 : GF^3, GF^4 : CE^3, GF^4 : GD^3$, *&c.; densitates erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem sit, & distantiæ sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica, uti Vir Cl. Edmundus Hallejus invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum.*

seconda sia quella delle densità di essa, e la terza sia la scala del calore, sicchè ne' luoghi A, B, C, D, &c. i gradi di calore, che penetrino i corrispondenti strati d' aria sieno espressi dalle ordinate AM, BN, CO, DP, &c. di essa curva M N P. Il punto F della verticale A G stia nella superficie terrestre, e l' altro A in cima all' atmosfera. E preso un altro qualunque punto D nella stessa retta G A, si chiami x l' ascissa F D, e dicansi p, q, r le ordinate D T, D L, D P, che le corrispondono in tali curve: e finalmente le loro ordinate iniziali F h, F X, F Y si chiamino a, b, c. E poichè l' elasticità, o la pressione dell' aria è proporzionale alla di lei densità, ed al calore (58); sarà F h : D t : : (F X : D L) (F Y : D P) : cioè ne' simboli analitici sarà $a : p :: bc : qr$, e quindi $q = (bcp) : ar$. Ma lo stato dell' equilibrio dell' aria (69) esige, che T t sia proporzionale alla gravità specifica di quello strato atmosferico, ch' è tra C, e D, ed alla di lui altezza D C. Dunque esprimendo per g la gravità acceleratrice dell' aria, ch' è tra C, e D, e ponendo, com' è chiaro, $CD = -dx$; avrassi $dp = -gqdx$: e quindi sostituendo in questa equazione il valore di q, che dianzi si è mostrato uguale a $(bcp) : ar$, otterrassi $dp = -gdx(bcp).ar$. Cioè

dp

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\,b\,c\,d\,x}{a\,r}$$

Ed integrando $l.\,p = C - b\,c\int\frac{g\,d\,x}{a\,r}$

§. 85. Cor. I. Il secondo membro di questa equazione non potrà integrarsi, se le variabili g ed r non sieno funzioni dell'altezza x, com' è di per se noto.

§. 86. Cor. II. Suppongasi la gravità acceleratrice dell'Aria $= 1$, e la Scala del di lei calore sia una retta, che incontri l'asse GFA delle divisate curve nel principio dell'Atmosfera: e poi si ponga $FA = f$; sarà $AD = f - x$. Ma sta $FA : AD :: FY : DP$, cioè $f : f - x :: c : r$: dunque sarà $r = (fc - cx) : f$, e quindi

$$l.p = C - bc\int dx\left(\frac{f}{afc - acx}\right) = C + \frac{bf}{a}\,l.\left(1 - \frac{x}{f}\right)$$

$$= l.a + l.\left(1 - \frac{x}{f}\right)^{\frac{bf}{a}}$$ E con ciò

$$p = a\left(1 - \frac{x}{f}\right)^{\frac{bf}{a}}$$

CAP.

CAP. V.

Del moto dell' acqua ne' vasi.

§. 86. Defin. XI. La distanza, che ha il foro di un vase, o di una conserva dalla superficie superiore dell'acqua, che vi si contiene, dicesi *Altezza dell' acqua sul foro*: ed essa superficie chiamasi *Pelo dell' acqua*.

PROP. XIV. TEOR.

§. 88. *La velocità, con cui l'acqua stagnante, ch' è in un Vase, comincia ad escirne per un picciol foro fattogli nel fondo, o nelle pareti, è dovuta all' altezza dell' acqua su tal foro* (159 Mec.).

Dim. Cas. I. Il Vase C A B F sia pieno d' acqua in sino a P G: e nel suo fondo orizzontale aprasi in D un picciol foro. Sarà manifesto, che al primo istante debba per esso escirne la vena, o il cilindretto d' acqua D R E T costantemente gravato dalla colonna D H dello stesso fluido, la quale ne soprasta al foro RD. In oltre si concepisca, che un' altro cilindretto *d r e t* fatto di materia Fig. 41. n. 1.

du-

dura, ed uguale alla vena D R E T tanto nella densità, che nel volume si lasciasse nel voto cader per dritto, finchè descriva uno spazio uguale al suo asse. Sarà la forza acceleratrice della vena d'acqua D R E T, alla forza che ne accelera il cilindretto *d r e t*, come la Colonna, o il cilindro d'acqua D K H R, al cilindretto *d r e t*. Imperocchè la vena D R E T n'è spinta fuori del vase dalla divisata Colonna: laddove il cilindretto *d r e t* discende gravato dal proprio peso. Ma gli spazietti *D T*, *d t* si son supposti uguali. Dunque le velocità, che avran conceputo questi corpi alla fine di tali spazietti, dovranno essere (*a*) in sudduplicata ragione delle divisate forze: cioè in sudduplicata ragione della Colonna d'acqua DKHR al cilindretto *d r e t*, o in sudduplicata ragione di DK a *d t* (*b*). Ma la velocità del cilindretto *d r e t* è dovuta all'altezza dt (159. Mecc.): dunque la velocità, onde n'è cacciata dal vase la vena d'acqua D R E T, sarà puranche dovuta all'altezza D K, cioè alla distanza del foro R D dal livello P K Q dell'acqua stagnante.

Cas. II. Se il forame M stia nelle pareti del

(a) §. 111. n. 3. Mecc.
(b) I cilindri D K H R, *d r e t* avendo uguali basi seguono la ragion delle loro altezze.

del vaso C A B F, la forza, con cui la vena OM di questo fluido n'è spinta orizzontalmente per O M, sarà quanto la pressione, ch'ella riceve dalla colonna di fluido, che avrebbe M per base, e per altezza MG (25). Dunque colla guida dell'antecedente discorso rileverete ancora, che la velocità di questo getto d'acqua sia dovuta alla di lei altezza sul foro. C. B. D. (*a*).

§. 89. Cor. I. E quindi le velocità dell'acqua, ch'esce da' fori aperti in fondo, o nelle pareti de' tubi, ov'ella si contiene, sono in sudduplicata ragione delle di lei altezze.

§. 90. Scol. Sesto Giulio Frontino, che fin da' tempi di Vespasiano scrisse sugli Acquidotti di Roma (*b*), si avvide, che la velocità dell'acqua uscente da un riservatojo dovea esser maggiore, o minore, secondochè questo fluido vi avea più, o meno di altezza. E 'l P. D. Benedetto Castelli (*c*), che

R

(a) La Scienza, che ha per objetto il moto delle acque solevasi dire *Idraulica*: ed *Idrostatica* quella dell'equilibrio loro: e si diceva *Aerometria* la Dottrina delle forze dell'aria. Ma queste tre Scienze furon dette *Idrodinamica* dal Signor Daniele Bernulli, e da altri.
(b) Vedete nel IV. Vol. del Tesoro di Grevio un'Opuscolo di Frontino, ed un'altro di Raffaele Fabretti sugli Acquidotti dell'antica Roma.
(c) Il P. Ab. D. Benedetto Castelli, la cui patria si è ignorata dal Montucla, e da altri, nacque in Brescia, e poi fu Monaco Cassinese in Montecasino.

che fu uno de' primi discepoli del Galilei, e primo Maestro del Torricelli, ragionando con metodo geometrico sulla misura delle acque correnti, stabilì come un principio di sperienza, che *le velocità delle acque sgorganti da' vasi, ov' esse contengonsi, debbano seguire la semplice ragione delle altezze di tali liquori*. Ma era serbato al Torricelli il rettificar questa legge idraulica, nel modo, che ve l'ho esibita nel Coroll. I.° di questo Teorema: e di conoscer l'assoluta misura della velocità di un fluido zampillante, ch' è quanto quella di un grave lasciatosi liberamente cadere dall' altezza del fluido sul foro (*a*).

PROP.

(a) Evangelista Torricelli alla fine del suo Trattato *de motu naturaliter accelerato* stabilisce per esperienza questo principio idraulico, ch' è il più sicuro, e 'l più utile di quanti ve ne ha in queste Scienze: cioè, *Suppono aquas velociter erumpentes in ipso eruptionis puncto eumdem impetum habere, quem haberet grave aliquod, sive ipsius aquæ gutta una, si ex suprema ejusdem aquæ superficie usque ad orificium eruptionis naturaliter cecidisset*.

PROP. XV. TEOR.

§. 91. *Se un Vase, costantemente pieno d'acqua, abbia ovunque un picciol foro, la cui ampiezza sia* f, *ed* a *la di lui distanza dal livello dell' acqua; sarà il numero de' pollici cubici di un tal liquore, che ne sgorgano in un numero n di secondi, uguale a* $2fn\sqrt{181a}$. *Posto che* a *siasi ridotta a pollici, ed* f *a pollici quadrati*.

Dim. Suppongasi, che la prima vena dell' acqua uscita pe 'l foro *f* serbi nel suo progresso quella medesima velocità, e direzione, ch' ella vi ebbe all' uscir dal foro, e che lo stesso ne addivenga alle altre vene successive. E poi si dica *c* cotesta velocità costante, e *t* un dato tempo. Sarà chiaro, che la mole d'acqua sgorgata in tal guisa nel tempo *t* debba formare un prisma retto, la cui base è quel foro, e l'altezza lo spazio corso equabilmente nel tempo *t*, e colla celerità *c* dalla stessa prima vena. Ma questo spazio è quanto *ct* (*a*). Dunque quella quantità d'acqua sarà *fct*. Or lo spazio descritto in un secondo da un grave, che si lascia giù cadere liberamente, è uguale a

R 2 pied.

(a) Vedi il fine della nota (a) §. 16. Mecc.

pied. par. $15.\frac{1}{12}$, cioè a 181 poll. (158. Mec.): e la velocità dovuta a quest' altezza, ch' è il doppio di 181 poll. è, 362 poll. Dunque (*a*) dovrà essere $\sqrt{181} : \sqrt{a} :: 362 : c$; e quindi sarà $c = 2\sqrt{181a}$: e la quantità dell' acqua sgorgata per f nel tempo t, ch' erasi mostrata uguale ad fct, sarà uguale a $2ft\sqrt{181a}$: (intendendosi ridotta a pollici la grandezza a, l' altra f a pollici quadrati, e 'l tempo t a secondi) cioè a $2fn''\sqrt{(181a)}$. C. B. D.

§. 92. Cor. I. E chiamando q la quantità d' acqua, ch' esce nel tempo t dal foro f aperto in un vase costantemente pieno di un tal liquore; sarà I.° $q = 2fn''\sqrt{(181a)}$. II.° $n'' = q : 2f\sqrt{(181a)}$. III.° $c = 2\sqrt{(181a)} = q : fn''$.

§. 93. Cor. II. Descrivasi la Parabola MIB coll' asse MB verticale, e col di lui parametro p uguale a pied. 15 e poll. 1., o a 181 poll: e troncata l' ascissa MB uguale a questo parametro, si tiri la sua semiordinata

Fig. 42. BI. Sarà chiaro esser questa retta di 181 poll. Imperciocchè essendo $BI^2 = p . MB = \overline{181}^2$, sarà $BI = 181$, e $2BI = 2.181$. Laonde, se prendasi nell' asse l' altra ascissa MC uguale ad a, e pe 'l di lei estremo le si conduca la semiordinata CA; dovrà essere (*b*) $\sqrt{MB} : \sqrt{MC} :: 2BI : 2CA$, cioè $\sqrt{181}$:

(a) N. 1. §. 153. Mecc.
(b) Cor. I. Prop. VIII. Lib. I. Con. Giann.

$\sqrt{181} : \sqrt{a} :: 2.181 : 2CA$, e quindi $2CA = 2\sqrt{181a}$.

§. 94. Cor. III. Dunque la velocità, dovuta all' ascissa verticale MC di questa Parabola, sarà espressa dal duplo di CA semiordinata corrispondente: e le tre formole del Cor. I. si trasformeranno in queste altre I.° $q = fn''. 2CA$. II. $n'' = q : f . 2CA$. III. $2CA = q : 2fn''$.

§. 95. Scol. *Se un Vase pieno d' acqua, ed un' altro di mercurio abbiano uguali altezze, ed in ciascuno de' loro fondi orizzontali aprasi un picciol foro; le velocità iniziali di questi fluidi saranno uguali, tuttochè l' acqua sia men densa del mercurio nella ragione di 1 a 14.* Per intendere come ciò vada, dicasi a la colonna d' acqua soprastante al foro del primo vase, ed A la colonna di mercurio imminente al foro dell' altro. Inoltre sia v la vena d' acqua, che dalla colonna a spignesi fuor del vase all' aprirglisi del foro, ed V sia una consimil vena di mercurio dell' altro vase. Dovrà essere $a : A :: 1 : 14$, ed $v : V :: 1 : 14$. Imperocchè essendo uguali i cilindri a ed A; i pesi de' liquori, che vi si contengono, debbon seguire la ragione delle densità di essi fluidi. E lo stesso vale pe' cilindretti v, ed V. Dunque sarà $a : A :: v : V$. Cioè le potenze a, ed A son proporzionali alle respettive vene d' acqua, e di mercurio, ch' esse ne spingono: e quin-

R 3 di

di le velocità delle medesime vene dovranno uguagliarsi (87 Mecc.).

§. 96. Esemp. In un vase costantemente pieno d'acqua aprasi un foro di un poll. di diametro, e la sua distanza dalla superficie suprema di tal fluido sia di 10 pied. par.$=$120 poll., si domanda quant'acqua ne' sgorghi in un minuto? Paragonando queste particolari grandezze con quelle, che trovansi nella formola del presente Teorema, sarà $n''=60''$, $a=120$, $f=\frac{355}{452}$: imperciocchè la circonferenza del foro, che ha il diametro $=$ 1. poll., dee essere $\frac{355}{113}$ poll. secondo la proporzione Meziana, e di $\frac{355}{452}$ poll. quad. l'ampiezza di esso foro. Dunque sarà $2fn''=(355.60''):226$; e $\sqrt{(181a)}=\sqrt{(181.120)}=147$: e quindi $2fn''\sqrt{(181a)}=(355.60''.147):226$. Sicchè l'acqua sgorgatavi in un minuto primo sarà 13540 poll. cub., che fan poco meno di 8 pied. cub.

PROP.

PROP. XVI. TEOR.

§. 97. *Il Vaso* L Q E *rigido, e di qualunque figura riempiasi d'acqua, o di altro fluido incompressibile* (a), *che poi ne sgorghi pe 'l picciolissimo foro* F *fatto nel suo fondo, o nelle pareti: dico esser la velocità, onde deprimesi un qualunque strato orizzontale* L E *di questo fluido, a quella, che vi tiene esso fluido uscente per lo foro* F, *come la grandezza del foro* F *alla grandezza dello strato* L E. Fig. 42.

Dim. Nel Vase L Q E, pieno di un fluido *incompressibile* stagnante, intendansi fatte le sezioni l e, λ ε, &c. parallele allo strato L E del fluido, le quali sieno vicinissime fra loro, e ne tronchino dal vase gli spazj uguali L l e E, l λ ε e, &c. Di poi aprasi di repente il foro F, onde ne sgorghi l'acqua; sarà chiaro, che non può mai la porzione di questo fluido rinchiusa nello spazio L l e E girne ad empiere l'uguale spazio l λ ε e, se altrettanto di fluido non ne sia di già escito per esso foro. Laonde se il prisma, avente F per base ed F G per altezza, sia uguale

R 4 al

(a) Queste due supposizioni della *incompressibilità* del fluido, e della *rigidezza* del vase, che sogliomsi omettere da alcuni Scrittori Idraulici, mi pajono essenzialmente necessarie per la verità di questo Teorema.

al volume di questo fluido uscito per F; sarà il prisma LleE uguale all' altro di F in FG: imperciocchè in ciascuno di questi due solidi contiensi una stessa quantità di fluido *incompressibile*. E quindi dovendo essere le loro basi reciproche alle altezze, sarà F : LE :: Cc : FG. Ma le rette Cc, ed FG son due spazietti insiem descritti dallo strato LE di fluido che deprimesi equabilmente, e dalla vena F ch' equabilmente ne sgorga per lo foro: ed essi son come le velocità, onde deprimesi quello strato di fluido, e ne sgorga questa vena (8.Mecc.). Dunque sarà la velocità dello strato LE a quella del fluido, sgorgante per lo foro, come la grandezza del foro alla grandezza dello strato. C. B. D.

§. 98. Cor. I. Di quì si rileva, che le velocità, onde muovonsi in un dato istante gli strati LE, KH del divisato fluido, debbano essere nella ragione inversa degli stessi strati.

§. 99. Cor. II. Cioè *se un fluido incompressibile trascorra entro di un qualunque vase rigido, che vadasi stringendo all' ingiù; le velocità de' suoi strati saranno inversamente come le ampiezze di questi*.

§. 100. Scol. Quì ho tacitamente supposto, che i diversi strati di un fluido incompressibile, il quale muovasi entro di un vase

se rigido, serbino sempre un perfetto parallelismo: e che la velocità di ciascuno strato non cangi di direzione; cosicchè tutte le particelle di fluido, che il compongono, abbiano ad avere un' identico movimento. Or queste supposizioni sono vere, quando il fluido sgorghi per un picciol foro aperto nel Vase, o ne fluisca in un tubolino saldatogli nel fondo, o nelle sue pareti. Ma se l' apertura del foro sia ben grande, o molto ampla la bocca del tubo saldato al vase; esse non potran reggere, come quaggiù ve lo dichiaro, se non si dimostri, che la linea, che passi pe' centri degli strati del fluido, sia una retta loro perpendicolare.

PROP. XVII. PROBL.

§. 101. *Il Vase LQE, nato dalla rivoluzione della curva QKL intorno al di lei asse QC verticale, sia ripieno d' acqua, ed ovunque in fondo, o nelle sue pareti si apra il picciol foro F; si domanda il tempo, in che si va votando d' acqua cotesto Vase.* Fig.42.

Sol. I. Dal foro F si meni la FM perpendicolare all' asse QC del detto vase: e poi nel piano FMC si descriva la Parabola conica MBI, avente per vertice principale il punto M, per asse la MC, e per parametro principale una retta di pied. $15\frac{1}{13}$.

II. Nello stesso piano FMC ed intorno al medesimo asse MC si descriva l'altra curva PRT tale, che qualunque sezione KH, fatta orizzontalmente nel vase, sia uguale al rettangolo delle ND, e DR corrispondenti ordinate della Parabola, e di questa curva.

Sarà il quoto, che nasce dividendo l'aja CPRD per lo doppio foro F, il numero de' minuti secondi, in che si vota d'acqua la parte LKHE del vase.

DIM. Prendasi nell'asse la *Cc* infinitesima rispetto a CD, e pe' punti C, e *c* distendansi nel vase le sezioni orizzontali *LE*, *le*. Sarà il tempo, che la suprema superficie dell'acqua v'impiega a deprimersi in *le*, uguale a quello, che ci vuole ad escirne pe 'l foro F la quantità dello stesso fluido contenuta nel cilindretto *LleE*, cioè a fluirne per F il picciol prisma *FG*. Dunque sarà il prisma, che tien per base il foro F, e per altezza FG, uguale al cilindretto *LleE*, cioè al prodotto di *Cc* nella sezione *LE* del vase, o di *Cc* in *ACP* (per costruz.), cioè ad un prisma, che abbia CA per altezza, e per base il rettangolo di PC in *Cc*. Laonde per l'equalità di questi due prismi, dovendo essere le loro basi reciproche alle altezze, sarà CP . *Cc* : F : : FG : AC, e quindi *Ccp* P : 2 F : : FG : 2 AC. : : F.FG:F.2AC. Ma poichè in questo tempuscolo può considerarsi il vaso come ripieno d'acqua in sino ad LE, ed F.FG n'è la quantità di un tal liquore uscita in esso tempuscolo; sarà la durata di questo tempuscolo (94) uguale ad F.FG : F. 2AC. Dunque lo stesso tempuscolo potrà benanche designarsi per *Ccp* P : 2F : e quindi il tempo, in che lo strato sublime LE di questo fluido deprimesi in KH, sarà di tanti secondi, quanti ne indica il quoto dell'aja CPRD per lo doppio del foro F.C.B.F.

§. 102. COR. I. *La Parabola* MNI, *la curva* QKL *generatrice del vase, e la curva de' tempi* PRT *hanno tal nesso fra loro, che da due di esse può rilevarsi l'altra, che ne rimane*. E quindi da ciò si potran risolvere non pochi Problemi sui tempi, onde si votan d'acqua diversi tubi.

§. 103. COR. II. Essendo i cerchi, come i quadrati de' loro raggi, saranno LC^2, e KD^2 come i rettangoli ACP, NDR, cui que' cerchi si sono supposti uguali.

PROP.

PROP. XVIII. TEOR.

§. 104. *La linea generatrice del Vase LQE sia una Parabola Biquadratica, cioè tale, che i quadrato-quadrati delle sue ordinate LC, KD,* Fig. 42. *&c. seguano la ragione delle loro ascisse QC, QD, &c. e situato cotesto vase coll' vertice in giù, e colla base all'insù si riempia d'acqua, che poi facciasi sgorgare per un picciol foro aperto nel suo vertice Q; sarà questo vase un'esattissima Clepsidra, o un' oriuolo ad acqua: ove la superficie di tal liquore scenderà uniformemente da LE sino a Q, passando in tempi uguali parti uguali dell' asse* (a).

Dim. Descrivasi la Parabola conica Qna, come sopra: ma che abbia il suo vertice nel foro del vase. E poichè per la natura della curva LQE sta $LC^4 : KD^4 :: QC : QD$, sarà LC^2 a KD^2, come $\sqrt{QC}$ a $\sqrt{QD}$, cioè (b) come aC ad nD. Ma quì sopra (103) si è dimostrato esser $LC^2 : KD^2 :: aC.CP : nD.DR$. Dunque sarà $aC : nD :: aC.CP : nD.DR$: e quindi CP uguale a DR. E ciò sempre dimostrandosi, sarà la linea PRT una retta parallela all' asse CQ del Vase. Ed i tempi, onde la superficie dell' acqua scende per le parti CD, DS dell' asse, saranno come i rettangoli CDRP, DSTR di uguali altezze, e quindi come le loro basi CD, DS. E finalmente sarà equabile l' abbassamento dello strato supremo dell' acqua, ch' è nel Vase (2. Mecc.): ond' ei sarà un' esattissima Clepsidra. C. B. D.

(a) Se il foro f suppongasi alquanto grande, l' equazione differenziale alla Clepsidra avrà le sue indeterminate sì stranamente mescolate insieme, ch' è difficilissimo il separarle: onde resterà ignota la curva generatrice di tal Vase.

(b) Cor. I. Prop. VIII. Lib. I. Con. Giann.

Altra Dimostrazione.

§. 105. Dicansi V, ed v le velocità, ond' esce l' acqua per lo foro Q, quando il suo strato supremo passi per le sezioni LE, KH del Vase. I semidiametri di queste sezioni si chiamino Y, ed y: ed X, ed x le loro ascisse QC, QD. E finalmente sia C la velocità costante, con cui si deprime la superficie dell' acqua entro la Clepsidra, ed f semidiametro del picciolissimo foro aperto in Q: dovrà (97) essere $V : C :: Y^2 : f^2$, e $C : v :: f^2 : y^2$. Dunque sarà *ex æquo* $V : v :: Y^2 : y^2$. Ma (88) è poi $V : v :: \sqrt{X} : \sqrt{x}$: Dunque sarà $Y^2 : y^2 :: \sqrt{X} : \sqrt{x}$, ed $Y^4 : y^4 :: X : x$. C. B. D.

§. 106. Defin. XII. *Linea Centrale* di un fluido, che trascorre in un vase, è quella che passa pe' centri di gravità degli strati di esso, paralleli al supremo.

PROP.

PROP. XIX. PROBL.

§. 107. *Dal Canale* ADGH *costantemente pieno d' acqua sino ad* AH, *ne scorra questo fluido per l' apertura* D G, *colla velocità* c ; *ritrovare la forza acceleratrice dell' elemento d' acqua* L l e E *compreso tra i di lei strati* L E, l e *perpendicolari alla linea centrale* I C.

Fig.43. n. 1.

Sol. I due strati l e, L E dell' acqua, che scende per lo tubo A D G H, sieno vicinissimi, paralleli tra loro, e ad entrambi ne insista a squadra la linea centrale I C K ne' punti C, e c. Per questa linea ICK, che suppongasi giacere (*a*) in un piano verticale, si distenda il piano H A B D G, e condottavi dal punto A la retta verticale A B, si calino su di essa da' punti C, c, D le perpendicolari C M, c m, D B. Inoltre pongasi A B = a, BD = b, A M = x, I C = s, e si dica X lo strato L E del fluido, o l' altro *l e*, F l'apertura del vaso ADGH, ed *f* il di lui foro. Sarà, condotta la *C r* parallela ad *M m*, *C r* = d x, *Cc* = d s, e 'l picciol prisma *L l e E* = X d s. E, ponendo uguale ad *1* la gravità specifica dell' acqua, dovrà la grandezza X d s dinotare il peso dell' acqua del

(a) Queste supposizioni limitano una tal ricerca.

del prisma *L l e E* : e l' altra X d x esprimerà quella forza, onde lo stesso prisma d' acqua n' è animato per *Cc*. Imperciocchè (246.Mecc.) sta *Cc* a *Cr*, cioè ds a dx, come il peso del prisma d' acqua *L l e E*, espresso per X d s, ad una tal forza per C c, che dovrà esprimersi per X d x.

Ciò posto il prisma *L l e E* si consideri per un solo istante, come un corpicciuolo rigido, e senza peso: sicchè l' acqua posteriore A L E H ne gravi per *Cc* la sua base L E, e l' anteriore *l D G e* sospingane per *c C* l' altra base *l e* dello stesso prisma. E suppongasi la prima di coteste pressioni essere uguale ad una colonna d' acqua avente L E per base, e per altezza l' indeterminata y, cioè uguale ad X y; sarà X(y+dy) quell' altra forza, che sospinge per *cC* la base *l e*; e quindi da questa pressione togliendone la prima, sarà X d y l' effettiva forza colla quale il prisma *L l e E* sarebbe sollevato per *c C*, s' ei non avesse altra tendenza. Ma quì sopra si è dimostrato, che il prisma d' acqua *L l e E* n' è animato per *Cc* con una forza espressa per Xdx. Dunque l' effettiva forza, con cui questo prisma tende all' ingiù per C c, sarà uguale ad X d x — X d y, e la di lui forza acceleratrice sarà (Xdx—Xdy) : X d s (*a*). Per la

(a) La forza motrice di un corpo divisa per la di la qual cosa chiamando v la celerità dello strato LE, sarà (*a*)

$$\left(\frac{Xdx - Xdy}{Xds}\right) ds = v\,d\,v$$

cioè $dx - dy = vdv$

ed integrando $x - y = \frac{1}{2}vv + C$ R

Or se dicasi c la velocità, con cui l'acqua ne va equabilmente sgorgando per lo foro DG; sarà $v : c :: f : X$ (98), e quindi $v = cf : X$, ed $\frac{1}{2}vv = ccff : 2XX$. E poi la costante C dee esser talmente determinata, che quando la variabile x è zero, l'altra y diviene uguale alla pressione atmosferica in A, cioè alla colonna d'acqua di un'altezza, che si chiami a: ed X si fa in tal caso uguale ad F. Dunque sarà $C = -a - ccff : 2FF$: e quindi surrogando questi valori di $\frac{1}{2}vv$, e di C nella formola R, avrassi

$$x - y = \frac{ccff}{2XX} - a - \frac{ccff}{2FF}$$

Ed $$y = x + a + ccff\left(\frac{1}{2FF} - \frac{1}{2XX}\right)$$

PROP.

di lui massa dà la forza acceleratrice. §. 70., e 91. Mecc.

(a) Vedi la nota (c) §. 124. Mecc.

PROP. XX. PROBL.

§. 108. *Poste le medesime cose del Probl. prec., ritrovare la velocità* c, *onde uniformemente sgorga l'acqua per lo foro* GD.

Sol. L'altezza della colonna d'acqua, ch'esprime la pressione del fluido nel forame GD, si chiami A, e dicasi b l'ascissa AB, che corrisponde al centro K di gravità di esso foro, la cui grandezza sia f. E nell'equazione finale del prob. prec. si sostituiscano A, b, f in luogo delle grandezze y, x, X, che vi si ritrovano; sarà

$$A = b + a + \frac{ccff}{2}\left(\frac{1}{FF} - \frac{1}{ff}\right)$$

E praticandovi le dovute riduzioni, otterrassi

$$c = F\sqrt{2\left(\frac{a+b-A}{FF-ff}\right)}$$

§. 109. Cor. I. Se la grandezza a differisca per pochi piedi dall'altra A, come suole addivenire, quando il vase ADGH non sia di gran lunghezza; quest'ultima equazione si ridurrà alla seguente

S c = 2

$$c = F\sqrt{\left(\frac{2b}{FF-ff}\right)}. \quad (a)$$

§. 110. Cor. II. E se la gravità acceleratrice, ch'è nelle vicinanze della nostra Terra, sia 1: e B dicasi l'altezza dovuta alla velocità c; (*b*) sarà B uguale a $cc:2$, e quindi (109) uguale a $bFF:(FF-ff)$: ed $FF-ff:FF::b:B$.

§. 111. Cor. III. Dunque *l'altezza dovuta alla velocità di questo getto sarà all'altezza dell'acqua sul foro, come il quadrato della sezione suprema di questo fluido al suo eccesso sul quadrato del foro*.

§. 112. Cor. IV. Ed essendo il foro f picciolissimo rispetto alla bocca F del vase; $FF-ff$ sarà quasi uguale ad F.

§. 113. Cor. V. E quindi *essendo picciolissimo il foro di un vase, la velocità dello getto sarà dovuta all'altezza dell'acqua sul foro*: come ve l'ho dimostrato nel §. 88.

PROP.

(a) Se f sia maggiore di F, cotesto radicale diviene immaginario; e ne indica non potersi rendere uniforme lo sgorgo dell'acqua per lo foro f.

(b) Quando la gravità acceleratrice è 1, ed un corpo si lasci liberamente cadere, diventa $vv = 2x$: vedi la nota (c) §. 124. Mecc; e quindi $x = vv:2$. Onde anche nel caso di questo Corollario dee essere $B = cc:2$.

PROP. XXI. TEOR.

§. 114. *Se un vaso pieno d'aria naturale, e ben chiuso, intendasi posto in un gran voto, e quivi apertogli un picciol foro; la velocità dell'aria uscente dal vase sarà sempre di 1200 piè parigini: tuttochè in esso vadasi l'aria continuamente diradando. E diverrebbe perpetuo un tal efflusso, se l'aria potesse all'infinito rarefarsi.*

Dim. Al foro del proposto vase concepiscasi verticalmente adattato un tubo dell'altezza di 26000 piedi (*a*), pieno di un liquore omogeneo tanto denso, quant'è l'aria naturale. La pressione di questo fluido del tubo dovrà equilibrarsi coll'elatere dell'aria del vase (73). Dunque la velocità, onde quel fluido si spingerebbe nel vase, se questo fosse sgombro d'aria, dovrà uguagliare la velocità dell'uscita dell'aria dal vase al voto. Ma quella velocità è dovuta all'altezza di 26000. piedi,

(a) La colonna d'acqua equilibrantesi coll'aria può comodamente porsi uguale a $32\frac{1}{2}$ piedi. Onde (56) facendo come $1:800$, così $32\frac{1}{2}$ ad un quarto; cioè a 26000; sarà questo l'altezza equivalente di un fluido omogeneo denso quanto l'aria, ch'è a lido di mare.

di, (*b*) e quindi tale che con essa potrebbe un mobile correre 1250 pied. in un secondo. Dunque la velocità iniziale dell'aria, ch'esce dal vase allo spazio voto, sarà pure di 1250 piedi.

Or suppongasi, che l'aria del vase continuando a sgorgare per lo stesso foro, non incontri veruna resistenza da quell'aria, che di già n'è uscita: e che l'aria rimasta nel vase vi si spanda di repente, ed in tal guisa, che questo suo moto *espansivo* non turbi il suo fluir nel voto. Sarà chiaro, che in ogn' istante di un tal efflusso, debba nel vase minorarsi l'elatere dell'aria, come si minuisce la densità di essa (*c*): cioè la potenza, che in ogn' istante di un tal afflusso ne spigne all'infuori una vena d'aria, è sempre proporzionale alla massa di questa. E quindi, per quel che vi mostrai nel §. 87. della Meccanica, la velocità di questo fluido sarà

(b) La velocità dovuta all'altezza di 26000 piedi è uguale a $2\sqrt{(15+\frac{1}{12})(26000)} = 1250$ pied. a un di presso. Ponderate quanto vi ho detto nella dimostrazione del §. 91 per la pratica, ed agevole misura delle velocità. Cioè se la velocità c è dovuta all'altezza a, (la quale siasi ridotta a piedi), sarà $2\sqrt{(15+\frac{1}{12})a}$ il n°. de' piedi, che può fare in un secondo un corpo mosso equabilmente colla velocità c.

(c) La densità dell'aria è proporzionale alla forza comprimente (62), e con ciò all'elasticità, cui questa è proporzionale.

sarà sempre di 1250 piedi parigini a un di presso: cioè tale, che con essa un mobile correrebbe 1250 piedi in un secondo. C. B. D.

§. 115. Cor. La velocità, onde l'aria naturale n'è proiettata dal di lei elatere, è di 1250 piedi: che a un di presso è quanto la velocità iniziale di una palla vibrata da una gagliarda carica di un Cannone da 24.

PROP. XXII. TEOR.

§. 116. *Se ad un Vase F voto d'aria aprasi un picciol foro f; sarà il tempo, in che l'aria esterna lo riempie, di tanti secondi, quanti ne contiene l'espressione* $\frac{F}{625 . f}$.

Dim. Col centro C, e cogli assintoti rettangoli CA, CH si descriva una qualunque Iperbole cubica BMm, cioè tale che le sue ordinate BD, MH all'assintoto CH sieno in ragion inversa duplicata delle loro ascisse CD, CH (*a*); sarà chiaro, che compiti i rettangoli CDBA, CHME, debbano essere le ordinate BA, ME all'altro assintoto CA in sudduplicata ragione inver- Fig. 44.

S 3 ra

(a) Defin. Pren. X. Mecc.

sa delle ascisse C A, C E loro corrispondenti. Inoltre la retta C A dinoti la densità dell'aria esterna, ch'è accanto al vaso. Si protragga la B A verso F, sin tantochè la F A adegui l'altezza di un fluido omogeneo tanto denso, quant'è l'aria cingente il vase, e di tanta pressione, quanto è l'elaterio della stess'aria: la qual retta, come vel dissi altrove (*a*), è di 26000 pied. a un di presso. Finalmente nella retta C A si tronchi la parte A E, ch'esprima la densità, che ha l'aria nel vase in un dato tempo del di lui riempimento: ed unita C F si compiano i rettangoli A C K F, A E G F.

Ciò posto, questi rettangoli ACKF, AEGF per avere la stess'altezza A F sono come le loro basi A C, A E: cioè come la densità dell'aria, ch'è d'intorno al vase, alla densità dell'aria, ch'è dentro di esso in un dato tempo del di lui riempimento, o come l'elatere di quell'aria all'elatere di questa. Imperocchè l'elasticità dell'aria esterna, e dell'interna, che suppongonsi penetrate da uno stesso grado di calore, sono proporzioli alle densità loro (62). Dunque la prevalenza dell'elasticità dell'aria esterna all'elasticità dell'interna dovrà dinotarsi per l'eccesso del rettangolo ACKF sull'altro AEGF, cioè

(a) Vedi not. (a) §. 114.

cioè per lo rettangolo C E G K, o pe'l di lui uguale di C A in EN: essendo pe' triangoli simili C A F, C E N la ragione di C A a C E uguale a quella di A F ad E N, e con ciò il rettangolo (*a*) di C E in A F uguale a quello di C A in E N. Ma la retta C A esprime la densità dell'aria esterna: dunque la retta E N sarà l'altezza, che dovrebbe avere un fluido omogeneo della densità A C per produrne cotesta prevalente pressione (21). E quindi la velocità, onde l'aria esterna entra nel vase, quando l'interna trovasi avere la densità A E, sarà dovuta all'altezza E N (86): e questa velocità dovrà stare alla velocità iniziale dell'aria esterna, in sudduplicata ragione di E N ad A F (153.Mec.n.1.), o di C E a C A, cioè, per la natura della descritta Iperbole, come BA ad E M.

Premesse tali cose, esprimasi per V una data vena d'aria esterna, ch'entri nel vase, cioè un prisma di quest'aria, il quale abbia per base il foro f, ed una picciolissima, e costante retticciuola per altezza. Ed *n* sia il numero di tali vene, che valgono ad empierne il vase di un'aria tanto densa, quanto è quella d'intorno ad esso: e la retta C A intendasi divisa nel numero *n* di

S 4 par-

(a) Prop. 16. El. VI.

particelle uguali, di cui una sia la Ee. Saranno, com'è chiaro, le densità AE, Ae, &c. dell'aria raccolta nel vase, come il numero delle vene dell'aria esterna, che vi sono entrate. E sarà il tempuscolo, che la vena V ne impiega ad entrar nel vase, quando l'aria interna trovisi aver acquistata la densità AE, al tempuscolo onde un'ugual vena d'aria vi entrerebbe colla velocità iniziale, come la velocità di questa alla velocità di quella (14. Mec. n. 3.), cioè come EM a BA, o ad EL (*a*), o come il rettangoletto EemM all'altro EelL. Dunque il tempo, in che questo vase riempiesi dell'aria esterna, starà al tempo, che ci porrebbe tal aria ad empirlo, se vi entrasse di continuo con velocità pari all'iniziale, e senza aver resistenza dall'aere interno, come l'aja iperbolica ABXC, ove terminano i rettangoletti EemM, &c, al rettangolo ABDC, somma degli altri EelL, &c, cioè come 2 ad 1 (*b*). Ma il secondo di questi due tempi è di tanti minuti secondi (92), quanti contengonsi nel quoto F : 2f.625. Dunque il tempo del riempimento dello stesso vase dell'aria esterna sarà F : 625 f. C.B.D.

§. 117.

(a) Da quel, che si è mostrato.
(b) Pren. X. Mecc.

§. 117. Esemp. Supponghasi essere di un piede cubico il dato vase, e di una linea quadrata il suo foro; sarà F=1. pied., ed f=(1:144)²: (imperciocchè ogni linea è una $\frac{1}{144}$ parte di un piede) cioè F=1, ed f=$\frac{1}{20736}$: e quindi dovrà essere

$$\frac{F}{625f}=\frac{20736}{625.}=33''.$$

PROP. XXIII. TEOR.

§. 118. *Se una massa d'aria temperata stia in mezzo a due colonne d'aria, una delle quali sia calda, e l'altra fredda; dalla cima della colonna d'aria calda dovrà scagliarsi una corrente d'aria verso la colonna d'aria fredda, ed una simile corrente dovrà poi dal fondo di questa spignersi verso di quella. E durerà questo flusso, e riflusso d'aria da su in giù, fintantochè un'identico calore non abbia queste tre arie ugualmente penetrato.*

Dim. Rappresenti CABc una colonna d'aria assai più calda di quella, ch'è nell'altra colonna DEFd: e tanto in cima, che in fondo ad esse intendansi posti i due tubi *Fig. 45. n. 2.*

cd

cd, CD in sito orizzontale, aperti d'ambe le parti, e ripieni d'aria temperata. E finalmente dinoti HG lo strato supremo dell' atmosfera, dove estendansi le due colonne CABc, DEFd.

E poichè le due colonne d'aria AGC, DHE, che si equilibrano, sono ugualmente ponderose: e la parte CABc della prima supponesi più calda, e con ciò più lieve di DEFd parte dell' altra; sarà la BGc, rimanente parte di quella, più pesante di FHd rimanente parte di questa. Dunque la pressione, che fa la colonna d'aria BGc contro a quella, ch'è nel tubo cd, sarà maggiore della pressione, che fa l'altra colonna d'aria FHd contro all' aria dello stesso tubo. E quindi per la prevalenza di quella pressione su di questa, dovrà spignersi una corrente d'aria calda da *c* verso *d* con impeto proporzionale a cotesta prevalente forza. E perchè con tal mezzo l'aria della colonna DEFd trovasi più gravata di ciò, che dianzi ella era; un'altra corrente d'aria dovrà spignersi da D verso C: cioè la prima corrente d'aria si farà nella cima di queste colonne, dalla calda in ver la fredda, e la seconda vi si eccitera in fondo ad esse dalla fredda verso la calda. E durerà questo flusso, e riflusso d'aria da su in giù; fin tanto che uno stesso calore non abbia ugualmente penetrate queste tre arie. C. B. D.

§. 119.

§. 119. Cor. I. Da questo giro d'aria addiviene, che il fuoco di una fornace, la quale abbia all' ingiù lo sfogatojo (*a*), vi si mantien sempre vivo, e sempre sospingesi verticalmente il fumo de' corpi, che vi bruciano.

§. 120. Cor. II. Se due stanze ben chiuse sieno tramezzate da un' imposta, che ne chiuda il comune uscio, ed una di esse sia più calda dell' altra; l'aria calda della prima stanza fluirà nella seconda per le fessure superiori dell'imposta, e per le inferiori rifluirà l'aria nella prima stanza dalla seconda (*b*).

CAP.

(a) In una mia fornace ho fatto aprirvi uno sfiatatojo inferiore, che metta in una stanza diversa da quella, ove sporge il di lei foco: e ne osservo, che in virtù di un veemente flusso, e riflusso d'aria, si mantien sempre viva la fiamma de' corpi, che bruciano in essa fornace, e che vi si sospigne il fumo verticalmente nel cammino.

(b) Il Signor D. Ignazio Stile valentissimo Architetto Napolitano, avendo forato un Monte in Cosoleto per dar lo scolo ad un Lago fattovi da' Tremuoti, eseguì mirabili operazioni, ed osservò strani fenomeni, uno de' quali parmi convenevole, ch' io quì vi narri, ed ispieghi. Egli per riuscir nel suo intento incominciò la perforazion del monte da' due punti opposti, cioè dal luogo, ove dovea *incanalar* l'acqua del Lago, e da quell'altro del di lei esito. E sebben la Natura con copiose sorgive, e con immense mofete gl'impediva i lavori, e talvolta ne sconciava buona parte del Cuniculo, facendovi cadere a slascio la di lui volta: ei non di

CAP. VI.

SAGGIO DE' VARJ SISTEMI ADOTTATI DAGLI SCRITTORI IDRAULICI SUL MOTO DELL' ACQUA NE' VASI.

§. 121. I Geometri Italiani sì famosi per le Idrauliche investigazioni (*a*), e tra essi il Castelli, il Torricelli, Giovan Alfonso Borelli, il Guglielmini, il Mariotte di nazion

di meno con valore, ed arte seppe vincere coteste renitenze della Natura. E, proseguendo la perforazion del monte, sì ben la diresse, che gli riuscì di farvi scontrar per dritto i Lavoratori delle opposte parti del Cuniculo, la di cui lunghezza ascendeva a palmi 2800. Ma l'avreste mai creduto? Nell'avventuroso momento, in che si scontrarono cotesti Lavoratori, si estinsero di repente tutti que' lumi, che vi erano 300 palmi d'ambe le parti dallo scontro. E questo straordinario avvenimento, che per poch' istanti arrestò il gestiente giubilo de' Lavoratori, ne richiamò l' attenzione del Signor Stile ad intenderne la sua cagione, che fu di poi rilevata essere la diversa temperatura d'aria, che ne riempiva le avverse parti del Cuniculo.

(a) E' una proprietà delle Italiche Regioni, riconosciuta benanche da' Savj Stranieri, il produrre abbondevolmente giudiziosi, ed accurati Scrittori Idraulici. La maggior parte degli Opuscoli di quelli, che vi son fioriti da due secoli in qua trovansi ordinati nella *Raccolta d' Autori del moto dell' acqua Edizione II. di Firen. in vol. 9.*

zion franzese, ed altri, stabilirono come un principio di sperienza, che *la velocità dell' acqua sgorgante per un foro fatto nel fondo, o nelle pareti di un vase, ov' ella si contiene, sia dovuta all' altezza dell' acqua su quel foro.* Vale a dire la velocità dell' acqua, o di altro fluido omogeneo uscente per un foro, è quanto quella, che si acquisterebbe un grave cadendo liberamente da un' altezza uguale alla distanza del foro dal livello del fluido. In fatti eccone tre sicurissime sperienze, da ciascuna delle quali emerge verità sì nobile, e vantaggiosa.

§. 122. ESPER. I. *Se ad una Conserva d' acqua si applichi orizzontalmente un tubo comunicante, e al di sopra di esso vi si apra un picciol foro; vedrassi il getto d' acqua risalir quasi all' altezza di quella, ch' è nella Conserva.* Dunque la velocità, onde verticalmente sospignesi quest' acqua, è quanto quella, che avrebbesi un grave acquistata, liberamente cadendo dall' altezza, che vi tien l' acqua sul foro (156. Mecc.).

§. 123. ESPER. II. *La Vena dell' acqua, che proiettasi per un foro aperto nella sponda di un vase dritto, ov' ella si contiene, si sperimenta di forma parabolica, avente quel parametro, che converrebbe al sentiero di un solido orizzontalmente proiettato colla velocità dovuta all' altezza dell' acqua su del foro.* Dunque tant' è la velocità di quel fluido zampillante, te, quanto quella della proiezion di questo solido (352. Mecc.).

§. 124. Esper. III. *Se in fondo ad un Vase dritto, costantemente pieno d' acqua, aprasi un picciol foro, e l' acqua, che n' esce in un dato tempo, ricevasi in un tubo cilindrico: e poi dalla quantità di questo fluido, uscitane in tal tempo, se ne calcoli la velocità dello getto; si troverà, che questa n' è dovuta all' altezza dell' acqua sul foro.* Leggete ciò che vi esposi nel §. 94.

§. 125. Ma il Varignonio lasciando la via della sperienza, quasi che fosse indegna de' Geometri Sublimi, o della Scienza, che vi si erge, fu il primo ad entrarne con piè ardito nel sentiero della dimostrazione, detta *a priori*; e per esso volle indagare le velocità dell' acqua sgorgante da' fori fatti ne' fondi, o nelle pareti de' vasi, ov' ella si contiene. Dopo del Varignonio altri Geometri di lui più cauti, e più arguti si condussero anche per questa via: e chi con metodi diretti, chi con indiretti fecesi a rinvenire delle zampillanti acque gl' impeti, e le misure: delle quali cose eccovene un brieve ragionamento.

§. 126. *Dimostrazione diretta del Varignonio sul moto delle acque, adottata dall' Ermanno.*

Le grandezze C, e c dinotino i primi cilindretti d' acqua, ch' escono da due uguali fori circolari, fatti a' fondi di due vasi diritti, e costantemente pieni di questo fluido alle respettive altezze A, ed a. Sieno V, ed u le velocità, ond' essi cilindretti ne scappan fuori per que' fori: e sieno P, e p i pesi delle colonne d' acqua, che stanno perpendicolarmente sugli stessi fori, e che ne spingono all' ingiù que' cilindretti. Dovrà (63. Mec.) essere P : p :: (V : v) (C : c). O pure P : p :: VC : vc: imperocchè i primi due termini di quest' analogia son le respettive cagioni di que' moti, che dagli altri due termini di essa ne sono espressi. Or quanto è più celere l' uscita di una vena, o di un cilindretto d' acqua, che fassi per un foro, tanto più fluido in un dato tempuscolo ne sgorga: dunque sarà V : v :: C : c. E poi i pesi P, e p delle divisate colonne d' acqua, che suppongonsi di uguali basi, son proporzionali alle loro altezze A, ed a. Dunque dovrà essere A : a :: VV : vv: e quindi $\sqrt{A} : \sqrt{a} :: V : v$.

§. 127. Ma chi mai concesse a questi due Geometri, che il semplice peso della colonna d' acqua soprastante al foro, siane la sola, e adeguata cagione del moto di questo fluido? L'acutissimo Giovanni Bernulli, come vel dichiaro altrove, ha dimostrato, che *l'acqua uscente per un foro fatto alla base, o alle sponde di una conserva, debba formare un certo gorgo entro al vase*. E l'Immortal Newton aveva prima del Bernulli osservato, che *le parti dell'acqua circostante al foro, concorrendo da ogni lato, ed affollandosi per escirne da esso, ne producano giù del foro un ristrignimento nella vena dell'acqua di già uscita*. Dunque l'azione della colonna d'acqua, gravitante sul foro chiuso, è ben diversa da quelle forze, che all'aprirsi del foro ne spingon fuori dell'acqua. E quantunque vogliasi accordare a que' due Geometri che, uscendo l'acqua da un vase per un di lui foro, o per un tubo adattatogli, non formi entro del vase verun gorgo, e che al di fuori non ne contragga la vena; pure la colonna d'acqua insistente sul cilindretto C non vi agisce uniformemente in quel tempuscolo, in che vi si produce la velocità V. Imperocchè questo cilindretto d'acqua col continuo velocitarsi va sempre più sottraendosi alla pression della colonna: onde cotesta forza non è mica uniforme.

Sistema Newtoniano sullo sgorgar delle acque da' Vasi.

§. 128. I. Sia ACDB un vase cilindrico ben rigido e fermo, che stia aperto al di sopra, ed abbia in mezzo alla sua base orizzontale il foro circolare FE. Un cilindro di neve PKLQ di una pari base sia imminente ad esso vaso, ed in modo che gli assi di questo solido, e di quello combacino ad una stessa retta verticale. E poi suppongasi, che il cilindro di neve non istia fermo, com'è il vase, ma che ne vada scendendo con moto uniforme, e colla velocità dovuta all'altezza HI, la quale stia all'altra GI, in duplicata ragione del foro, al fondo del vase. Inoltre suppongasi, che la base KL del cilindro diacciato, all'arrivarne sulla bocca del vaso, si sciolga di repente in acqua, e che vi si formi il cilindretto, o la vena d'acqua AabB, la quale staccata dal cilindro di neve scenda col proprio peso dentro al vase, e per l'attrazion delle sue parti stringasi di mano in mano. Dovrà ella passare adeguatamente per lo foro FE, ed escirne colla velocità dovuta all'altezza IG. Imperocchè le forze orizzontali, onde stringesi di continuo la vena discendente AabB per ritenervi la continuità nella sua massa, non turbano la velocità, ch'ella si acquista

Fig. 45. n. 1.

col cader verticalmente. Dunque le velocità della vena discendente saranno (153. Mecc. n. 1.) in sudduplicata ragione delle altezze da lei descritte. Con che se nella retta GI tolgansi le due particelle Gg, Hh infinitesime, e descritte in tempi uguali dalla vena, che le descrive; dovrà esser l'acqua contenuta nel cilindretto EefF quanto quella dell'altro AabB: e quindi per l'equalità di questi solidi dovrà stare $Gg : Hh :: AH^2 : EG^2$. Ma la prima di queste due ragioni adegua il rapporto delle velocità, con cui la vena d'acqua trascorre gli spazietti Gg, Hh (8 Mecc.), le quali si sono mostrate essere in sudduplicata ragione di GI ad HI. Dunque sarà $AH^2 : EG^2 :: \sqrt{GI} : \sqrt{HI}$. Val quanto dire l'ampiezza della vena iniziale sta alla di lei ampiezza nel luogo G, in sudduplicata ragione di GI ad HI, cioè, da quel che si è supposto, come il fondo, o la bocca del vaso, al di lui foro. E quindi la vena d'acqua si troverà in G ristretta quanto il foro FE, e vi passerà adeguatamente colla velocità dovuta all'altezza IG.

§. 129. Il Solido formato dal cerchio AB, che colla riferita legge va restrignendosi, sinchè diventi quanto FE, dicesi *Cateratta Newtoniana*. E se vi aggrada concepirne la sua genesi, immaginatevi descritta cogli assintoti IK, IG l'Iperbole AME di tal natura, che le ascisse IG, IH dal centro I, sieno inversamente come i quadrato-quadrati delle loro ordinate EG, AH: e ch'ella poi si rivolga con perfetta rivoluzione intorno all'assintoto IG.

§. 130. II. Premesse queste supposizioni, immaginatevi, dice il Gran Newton, che la cavità del vase, circostante alla Cateratta, sia piena di neve solida, e sì liscia nella parte convessa, che l'acqua stempratasi dal cilindro diacciato PKLQ scenda per questo voto AMEFNB, come per un imbuto di neve. Sarà manifesto dover l'acqua della vena AB scorrer per entro a tal imbuto, come se naturalmente vi discendesse: non recandole verun ritardamento la pulitissima superficie dell'imbuto.

§. 131. III. Or supponete, soggiunge il Newton, che questo imbuto di neve di repente si sciolga in acqua: sicchè il vaso ACDB si trovi sempre pieno di un tal liquore sino ad AB. Sarà lo sgorgo, che farà l'acqua per lo foro FE, nè minore, nè maggiore di quello, ch'erane dianzi. Non minore: perchè la neve dell'imbuto sciolta in acqua si sforza ancor essa di calare: e quindi ne dovrebbe accelerar la discesa di quella, che soprasta verticalmente al foro. Non maggiore: perchè la neve risoluta in acqua non può discendere, se prima non v'impedisca la discesa di quell'altr'acqua. E quindi l'acqua sgor-

sgorgherà per lo foro EF, come se liberamente vi fosse caduta dall' altezza IG (*a*).

§. 132. In somma a dir corto, ecco la formazion della Cateratta secondo la mente del Newton. „ Una Colonna d' acqua, che si lasci
„ cadere col proprio peso, non può serbarvi
„ la forma cilindrica; ma dee prender quella
„ di una Conoide generata dalla rivoluzione
„ di un' Iperbole di 4°. ordine intorno al
„ suo asse assintotico (*b*). Imperciocchè la
„ velocità di ogni strato di questo fluido
„ dee essere per ragion della sua discesa ver-
„ ticale (*c*) in sudduplicata ragione dell'altez-
„ za, ch' egli ha percorsa: e la stessa velo-
„ cità dee seguir puranche l' inversa ragione
„ dell'ampiezza di esso strato: dovendo quest'
„ acqua formare un tutto continuo nella Ca-
„ teratta. Dunque i quadrati de' diametri
„ delle sezioni della Cateratta saranno come
„ le radici delle loro altezze: e la curva
„ generatrice di essa sarà la divisata Iper-
„ bole. Or questa Cateratta è identica a
„ quella, che formasi entro di un vaso pie-
„ no d' acqua, allorchè questo fluido sgorga
„ per un foro orizzontale dello stesso vase.
„ Dun-

(a) Vedi §. 128. in fine.

(b) Questa Iperbole è tale, che i quadrati delle ordinate AH, EG, all' assintoto IG sieno in sudduplicata ragione inversa delle corrispondenti ascisse dal centro I.

(c) §. 153. n. 1. Mecc.

„ Dunque la velocità dello sgorgo è dovuta
„ all' altezza di una tal Cateratta.

§. 133. Ma questo nuovo, e luminoso sistema sullo sgorgar delle acque da' vasi non abbacinò i Geometri di Europa a segno di non far loro vedere i suoi difetti. Quindi è, che l' elegantissimo Scrittore Eustachio Manfredi per accertarsi della verità di questa Teorìa tinse di rosso la superficie suprema dell' acqua, ch' era stagnante in un vase: ed aprendo un picciol foro nel di lui fondo, vide la tintura comunicarsi lentissimamente alle parti inferiori dell' acqua, e poi al di lei getto: quasichè le parti di questo fluido, ch' erano a piombo sul foro, o non si movesser punto, o assai meno di ciò, che il chiederebbe la velocità dell' acqua sgorgante. E 'l Signor Daniele Bernulli con quest' altra sperienza replicata con accuratezza venne anche a ricredersi della Cateratta Newtoniana. Nell' acqua stagnante, ch' empiva un immobile vase cilindrico posto verticalmente, ei faceva galleggiarvi varj pezzetti di cera lacca, disseminandoli nella superficie suprema dell' acqua a varie distanze fra loro. Poi ne apriva un foro, ch' era in mezzo al fondo del vase: ed osservando il moto di questi galleggianti, non li vide mai muoversi rasente la Cateratta Newtoniana, ma scender tutti per rette verticali in sino al fondo: e con tal legge, che i pezzi di ce-

ceralacca posti a piombo sul foro vi discendevano verticalmente, e per tal direzione anche ne uscivan fuori: laddove gli altri pezzi torcevan cammino, quando erano presso al fondo, e poi nel foro immergevansi.

§. 134. A queste objezioni fatte *a posteriori* al Sistema Newtoniano sul moto de' fluidi ne' vasi, possono aggiungersi altre *a priori*, e sono. I. L'acqua, che scende per l'imbuto di neve BFEA, non preme i di lui pareti, nemmen lievemente. Dunque se in esso vi si farebbe un foro, l'acqua scendente non vi zampillerebbe. E questo è contrario alle leggi idrostatiche, come saggiamente Gio. Bernulli aveva al Newton objettato. II. L'acqua, che trascorre per questo imbuto di neve, dovrebbe serbar sempre la continuità nella sua massa: quandochè da Daniele Bernulli, e dal d'Alembert è stato dimostrato, che l'acqua fluente ne' vasi talor cessi d'essere continua. III. Ed in fine l'acqua, che scende in questa Cateratta coll'intero suo peso a guisa di un corpo solido, supponesi priva di qualunque forza laterale: dunque non può resistere alla pressione dell'acqua stagnante, che la circonda: onde il suo moto non sarà identico a quello, ch'essa ne avea, scendendo per l'imbuto di neve.

§. 135. Ma prima, ch'io vi sviluppi altri Sistemi sullo sgorgar delle acque da' vasi, non

non v'incresca intendere due ritrattazioni; che il Gran Newton fu obbligato a fare su questo argomento. Egli avendo misurato il foro di un vase, e la quantità d'acqua uscitane equabilmente in un dato tempo, trovò *la velocità di questo getto* (92) *esser dovuta alla metà dell'altezza, che vi teneva l'acqua sul foro*: e sì scrisse nella prima Edizione de' suoi Principj. Ma poi si avvide; che la vena di quest'acqua sgorgante si restrigneva all'ingiù a cagione de' moti obbliqui delle parti dell'acqua circostante al foro, le quali affollavansi ad escirne per esso: e che la massima contrazione di tal vena (lo che accadeva a picciola distanza dal foro) stava all'ampiezza di esso, come 1 a $\sqrt{2}$. Quindi è che nella condotta del divisato calcolo tenne conto non già del foro, ma dell'ampiezza della vena nel massimo di lei ristrignimento: e rinvenne la velocità dell'acqua sgorgante esser dovuta all'intera altezza di esso fluido sul foro.

§. 136. Di più nella I. Edizione de' Principj Matematici del Newton eravi questa illazione. *Vis, qua totus aquæ exilientis motus generari potest, æqualis est ponderi Cylindricæ columnæ aqueæ, cujus basis est foramen* EF, *& altitudo* FH: laddove nel Cor. 2. Prop. 36. Lib. II. dell'Edizione del 1713. leggesi *Vis, qua totus aquæ exilientis motus generari potest, æqualis est ponderi Cylindricæ columnæ*

 aqueæ,

aqueæ, cujus basis est foramen E F, *& altitudo* 2 F H. Vale a dire la forza dell' acqua sgorgante quì si propone dupla di quella, ch' erasi nella prima Edizione rapportata: e vi si soggiunge. *Nam aqua exiliens quo tempore hanc columnam æquat, pondere suo ab altitudine* F H *cadendo, velocitatem suam, qua exilit, acquirere potest*.

§. 137. In questo Corollario adunansi alcune voci, ed espressioni, che avrebbersi dovuto meglio chiarire, e determinare dal Newton: quali sono *vis*, *totus*, *aqua exiliens quo tempore hanc columnam æquat*, ed altre. Dunque non fia maraviglia se gli Scrittori Idraulici non siensi accordati seco nella nozione, e nella misura di questa forza. Infatti i Commentatori del Newton sforzandosi di entrare nella di lui mente, par che intendano per questa forza, *la cagion produttrice del moto dell' acqua della Cateratta, uscitane dal foro*: mentre tal forza da Daniele Bernulli erasi chiamata *vis ad effluxum animans*, e da Eustachio Manfredi, *forza, che impiegasi ad espeller l' acqua dal predetto foro*. Di più Daniele Bernulli, e Pietro Michelotti aderirono alla prima misura di questa forza, cioè a quella, che vien proposta nella I. Edizione de' Principj. Il Conte Riccati, e 'l Jurin adottarono la Correzione Newtoniana. E lo stesso Bernulli cangiando parere

rere si pose a sostener la seconda misura esibita dal Newton nel cit. Cor. 2.

§. 138. In un conflitto di opinioni sostenute da sì valorosi Ingegni parrebbe temerità, o follìa l' intrigarvisi; pur non di meno il dover mi spigne a chiarirvi questo Corollario giusta mia possa. „ Immaginatevi (eccone la dilucidazione), che la forza F generi continui, ed uguali elementi di velocità nel corpo M, la somma de' quali sia C alla fine di un tempo t. Sarà M C la quantità di moto (72. Mecc.), che alla fine di questo tempo troverassi nel corpo M. E se la forza Φ, proiettando colla velocità C uguali corpicciuoli, gli unisca insieme, e ne formi alla fine del tempo t una massa quanto M, muoventesi colla velocità C; la quantità di moto, che avrà questa massa alla fine del tempo t, sarà ben anche uguale ad M C. Dunque dovrà essere F=Φ. Ciò posto il foro E F si chiami *f*, *a* sia l' altezza dell' acqua su di esso, e *c* la velocità dovuta all' altezza *a*; sarà 2 *a f* la colonna d' acqua della base *f*, e dell' altezza 2 *a*; e sarà 2 *a f c* la sua quantità di moto (72. Mecc.), quando ella ne avrà percorsa liberamente l' altezza verticale *a*. Ma in questo tempo pe 'l foro *f* proiettansi colla velocità *c* tante vene d' acqua, che

„ la

„ la loro somma diviene (152.Mec.n.3.) uguale
„ a $2af$, e quindi la quantità di moto in que-
„ st'acqua rammassata è $2afc$. Dunque la
„ forza generatrice di questo moto sarà ugua-
„ le al peso della colonna d'acqua, avente
„ per base il foro f, e per altezza $2a$.

§. 139. Finalmente è d'avvertirsi, che l'acqua discendente per la Cateratta Newtoniana intanto sgorghi pe'l foro f colla velocità dovutane all'altezza a, in quanto realmente n'è caduta dalla superficie dell'acqua in sino al foro. Onde su di ciò accordasi questo Sistema con quello del nostro Guglielmini, il quale così scrive nella Prop. VI. *Sulla Natura de' Fiumi*; „ Se un va-
„ se sarà pieno di sfere, e nel fondo di
„ esso sia un foro, per lo quale possano
„ uscire con libertà alcune di esse, e che
„ il sito lasciato dalle sfere ch' escono, sia
„ riempiuto da altrettante aggiunte nel me-
„ desimo tempo al di sopra, di modo che
„ il vaso resti sempre pieno; usciranno
„ esse dopo qualche tempo colla stessa ve-
„ locità, come se fossero discese da tanta
„ altezza, quanta è la distanza dello strato
„ superiore dal foro ". Imperocchè le prime sfere, ch' escon dal foro, togliendo il sostegno alle superiori, che le toccano, le fan cadere: e queste sottraendosi dalle altre, che son più su, le obbligano puranche a calare; e così delle altre, finchè le supreme sfere ritrovandosi senza esser sostenute dalle inferiori, scenderanno liberamente dalla loro altezza sul foro.

Teorìa Idraulica del Maclaurin.

§. 140. Il Celebre Colin Mac-Laurin riflettendo sulle nuove pressioni, che destansi ne' fluidi in moto, opinò, che *l' intero peso dell' acqua contenuta in quel vase, per un foro del quale ella ne fluisce, debbasi dividere in tre forze prementi: una destinata ad accelerare il fluido, ch' è dentro del vase, l' altra ad accelerar quella di lui parte, ch' esce pe 'l foro, e la terza impiegata a premerne le pareti del vase*. E colla guida di queste supposizioni, e delle leggi della Cateratta Newtoniana, ei ne distese la Teoria, e 'l calcolo de' fluidi in moto. Intanto questi calcoli sono facili, e ben guidati; ma i principj fisici, onde discendono, pajono precarj, o a bella posta torniti da questo Scrittore per ottener que' risultati, ch' ei voleva.

Metodo del Signor Daniele Bernulli.

§. 141. La prima Opera, ove le Teorie Idrauliche vidersi all' Analisi Moderna innestate, fu l' Idrodinamica del Signor Daniele Bernulli impressa nel 1738. in Argentina. Qui-

Quivi il Granduomo dal *principio della Conservazion delle forze vive* (a), come da copiosa vena, seppe derivar le leggi *dell' acqua sgorgante pe' fori de' vasi : di quella, che sospingesi ne' tubi sommersi : e di quell' altra, che da straniera forza n' è sollevata*. E volendo viepiù estendere tali ricerche, seppe altresì definire *i moti de' fluidi omogenei, che pe 'l proprio peso trascorrono ne' vasi, e degli eterogenei, che in virtù del loro elatere vi si diffondono*. E finalmente trattò per iscienza, e col calcolo *le oscillazioni de' fluidi omogenei ne' Sifoni, e 'l moto vorticoso di questi liquori*. Le sperienze, che l' Autore sparge in quest' Opera, son decisive : profonde, e adeguate le di lui specolazioni : e leggiadrissime le formole, che da queste, e da quelle ritraendole, agli usi pratici sovente adatta. Onde l' Idrodinamica del Bernulli potrebbe aversi per un giudizioso lavoro di un' Analista interpetre della natura, se il metodo di alcune Idrauliche investigazioni fosse meno indiretto, e più evidente quel principio, che il regge.

Me-

(a) Leggere il 2. §. della nota (a) §. 208. Stat.

Teorìe Idrauliche del Signor Giovanni Bernulli.

§. 142. L' Acutissimo Giovanni Bernulli scorrendo le Teorìe Idrauliche, che v' erano a' tempi suoi, si dolse, che i principj fisici, su' quali fondavansi, non erano, che nude sperienze, o precarie supposizioni. Ei dunque pensò di sottomettere alle leggi della Meccanica i movimenti de' fluidi zampillanti, e di quegli altri, che trascorrono per de' tubi : ergendovi una Scienza su principj chiari, e diretti. E dappoichè all' industre suo genio l' opera rispose, ne diè in luce una ben lunga dissertazione distinta in due parti, che ad alcuni Geometri è sembrata assai preclara, sì per la nitidezza de' principj fisici, ch' egli adotta, che per l' accuratezza de' calcoli, che su vi distende. Nella prima parte il Valentuomo suppone un vaso cilindrico verticalmente eretto, e costantemente ripieno d' acqua, che in virtù del di lei peso va fluendo in un tubo orizzontalmente applicato alle sponde del vase. E quivi stabilisce, come un principio favorito dalla Natura, *che non può l' acqua passar dal vase al tubo, se prima non vi formi un certo gorgo a guisa d' imbuto*. Altrimenti ne addiverrebbe un salto nella velocità del fluido, che dalla cavità di quello alla cavità di que-

sto

sto (*a*) trascorrendo farebbesi di repente assai più celere di quello, ch'erane dianzi. E detta a l'altezza del fluido nel vase, h l'ampiezza di questo, m l'ampiezza del tubo, v la velocità dell'acqua nel tubo, e g la forza acceleratrice di questo fluido, ne deduce il Bernulli essere $vv(hh-mm):2h$ quella forza motrice, che applicandosi al primo strato dell'acqua nel vase, varrebbe a produrre l'effettiva accelerazione degli strati dell'acqua nel gorgo: la qual espressione diviene uguale a $gz(hh-mm):h$, quando (*b*) si ponga $vv=2gz$. E perchè rifondendo tant'acqua nel vase, quanta n'è uscita dal tubo, rendesi equabile cotesto afflusso; essa forza motrice dee impiegarsi alla sola formazion del gorgo *, e dee pareggiarne il peso dell'acqua nel vase, cioè la grandezza gha: Dunque sarà gz

(a) Ecco quel, che soggiunge il Bernulli nel §. III. Part. I. Hydraul. *Dum transit liquor ex uno tubo in alterum, mutabitur utique velocitas in ratione reciproca amplitudinum: at nulla mutatio est subitanea, sed successiva, & gradualis; procedens per omnes possibiles gradus intermedios a minori ad majorem, vel a majori ad minorem* . . . . E nel §. V. *Formatur itaque pro latitudine indefinite parva aliquis quasi gurges ex lato in angustum coarctandus, per quem liquor continua acceleratione, sed tamen per gradus adaucta perlabi debet*.

(b) Leggete la nota (c) del §. 124. Mecc; o l'altra della (b) 110. Scien. de' fluid.

$gz(hh-mm):h=gha$. Dalle quali cose il Bernulli ne trae il seguente Teorema. *In questo Canale costantemente pieno d'acqua, la velocità di esso fluido uscente per lo tubo converge celeramente a farsi quanto quella, ch'è dovuta all'altezza* $hha:(hh-mm)$. Onde, supponendovi m picciolissima rispetto ad h, cotest'altezza dovrà uguagliar quella dell'acqua sul foro, che si è posta uguale ad a.

§. 143. Questo Geometra si avvale di un simigliante metodo nel calcolare il moto dell'acqua, che da un vase verticale ne fluisce in più tubi orizzontali posti l'un d'appresso all'altro. Ed ei supponendo cresciuto all'infinito il numero di questi tubi orizzontali, ed all'infinito minorata la lunghezza di ciascun di essi; preparasi a risolvere tutti i Problemi *sull'acqua trascorrente per un canale di qualunque figura*: che son l'oggetto della II. Parte di questa Dissertazione Idraulica. Imperocchè una tal serie di tubi adattati l'un dopo l'altro formano un canale, la cui figura nasce dal sito, onde quelli si concepiscono tra se commessi. Ma l'equazione differenziale, che il Bernulli ne ritrae contiene il pareggiamento della somma de' pesi di ciascuno strato del fluido, ridotta alla superficie suprema colla somma della *forza idrostatica*, e dell'altra *idraulica* dello stesso fluido. Ove per *potenza idrostatica* intende la somma degli sforzi di ciascuno strato di passar nel luogo del pros-

prossimo inferiore: e per *forza idraulica* la somma delle forze, ch' essi strati ne concepiscono dal fluir dell' acqua (*a*).

§. 144. Ma un Geometra dimostratore ha diritto di domandare al Bernulli, perchè mai al rendersi equabile l' efflusso dell' acqua pe 'l tubo, l' intero peso dell' acqua, ch' è nel vase, debbasi impiegare alla sola formazione del di lei gorgo d' accanto al tubo? E perchè l' intero peso dell' acqua nel vase dee pareggiar quella forza, che ne spigne l' acqua nel gorgo? Dunque potrem dire col Signor de la Grange, che questo ingegnosissimo sistema del Signor Giovanni Bernulli debba esser più chiaro, e preciso, perchè ne diventi sommamente gradevole a' Matematici (*b*).

Me-

(a) La differenza di queste due forze non piacque al Signor d' Alembert §. 191. *Traitè des fluides*. Ma di esse se ne avvalse il Signor Krafft per risolvere il Problema del moto dell' acqua ne' vasi di qualunque figura. *Vol.* X. *Att. Ant. Pietrob.*

(b) Il Signor d' Alembert nel luogo citato ha fatte molte sottilissime riflessioni sul sistema Idraulico del Signor Giovanni Bernulli; alcune delle quali non sono sembrate assai convincenti al Signor Koesner. *Memoir. de Gotting. Vol.* II.

Metodo del Signor d' Alembert sul Moto de' Fluidi.

§. 145. Quel principio di Statica, di cui si avvalse Giacomo Bernulli per ritrovare i centri di oscillazione (*a*), divenne per le speculazioni del Signor d' Alembert sì universale, ed attivo, che potè applicarsi ad iscovrir le leggi de' liquori, i quali muovonsi ne' vasi. Onde tali Problemi, le cui soluzioni dianzi spaventavano i più profondi Geometri di Europa, si videro dipendenti dalle note leggi dell' equilibrio de' fluidi. Un tal principio fu indicato dal d' Alembert verso la fine della sua *Dinamica*, e poi proposto distintamente e maneggiato nella sua Opera *sull' equilibrio e sul moto de' fluidi, uscita in luce nel* 1744., e nel *Saggio di una nuova Teorìa sulle Resistenze de' fluidi, impresso nel* 1752. Ma la più chiara espressione, che può farsene pe' Giovanetti, parmi esser la seguente.

§. 146. TEOR. *I corpicciuoli* A, B, C, &c. *di un qualunque Sistema sieno respettivamente animati dalle forze acceleratrici* φ, ψ, π, &c., *ond' essi in un dato istante concepiscano le velocità* V, U, v, &c., *le quali alla fine del seguente tempuscolo* d t *diventino* V', U', v', &c:

V essia-

(a) Leggete la nota (a) §. 208. Stat.

e siane V *composta da* V', *ed* V'': U *da* U', *ed* U'': v *da* v', *ed* v'', &c; *dico dover esservi equilibrio in tal Sistema, se il primo* A *fosse animato dalle forze* A V', *ed* A φ d t: *il secondo* B *dalle forze* B U', *e* B ψ d t: *il terzo* C *dalle altre forze* C v'', *e* C π d t, &c.

Dim. Imperocchè il corpo A alla fine del tempuscolo d t tende a muoversi colle velocità V' ed V'' (che son le componenti della sua antecedente velocità V), e coll'altra φdt generatavi dalla forza acceleratrice φ (115 Mecc.). Ma di queste tre velocità la sola V' n'emerge in esso corpo: dunque le altre due V'', e φ d t han dovuto distruggersi. Nello stesso modo si dimostra, che alla fine dello stesso tempuscolo si debbano in B distrugger le velocità U'', e ψ d t: in C le velocità v'', e π d t, &c. Dunque se il primo A tendesse a muoversi colle sole forze A V'', ed A φ d t: il secondo B colle sole forze B U'', e B ψ d t: il terzo C colle sole forze C v'', e C π d t, &c. non vi sarebbe moto in tal Sistema. C. B. D.

§. 147. Cor. I. Se questi corpi sien disuniti; le forze applicate a ciascuno di essi si distruggeranno, ond'ei ne rimarrà in riposo. E se questi corpi sieno congiunti; le divisate forze resteranno non già distrutte, ma tra loro equilibrate.

§. 148. Cor. II. Se lo strato X di un qualunque liquore sia animato dalla forza π, onde abbia in un dato istante la velocità v, che alla fine del secondo tempuscolo d t diventi v + d v; sarà v' = v + d v, ed v'' = — d v: imperocchè dovendo essere per supposizione v = v' + v'' = v + d v + v''; sarà v'' = — d v. Dunque *resterà senza moto questo strato, se sia animato dalla forza* X π d t — X d v.

§. 149. Scol. Questo Principio, di che vi ho favellato nella Meccanica, e nella Statica (*a*), meritava di esser vie più chiarito, per intenderne distintamente la sua applicazione a' Problemi Idraulici. Ed ei può chiamarsi *Principio d'equilibrio tra 'l moto perduto, e tra l'acquistato in ogn'istante da ciascun de' corpi di un Sistema in moto*.

§. 150. Intanto il Signor d'Alembert, conducendo questo Principio allo scioglimento de' Problemi Idraulici, volle unirvi due supposizioni, ch'ei non carpì dalla Natura, ma per comodo del calcolo ne trascelse. Cioè I. *i varj strati di un fluido, che si muove in un vaso, debbono esattamente serbare il loro parallelismo: in modo, che ciascuno strato sottentri sempre nel luogo di quello, che lo precede*. II. *La velocità di ciascuno strato non varia punto in direzione: cioè a dire tutti i punti di uno stes-*

(*a*) 241. Mecc., e 272. Stat.

so strato muovonsi con pari velocità, e per direzione parallela all' asse del vaso. E finalmente soggiunse questo gran Geometra (*a*): *se non cisi accordino coteste supposizioni, saremo forzati a rinunciare ad ogni Teorìa sul moto de' fluidi, fintantochè non arriveremo a conoscerne perfettamente la natura. Poichè non vi sarebbe altro mezzo per determinar questo moto, che l' esaminar quello, che vi dovrebbe avere ciascuna particella: la qual cosa non può ottenersi senza conoscere la natura de' fluidi*.

§. 151. Ma questo giudizio di un sì gran Filosofo non fu, che precipitoso, e vana quella diffidenza, che ne concepì il P. Lecchi di non potersi trattare a priori coteste Teorìe, se non si concedano tali supposizioni. Imperocchè lo stesso d' Alembert in altre opere, che di poi impresse, cercò di risolvere questi Problemi Idraulici con metodi più semplici, e diretti, e senza punto avvalersi delle rammentate supposizioni (*b*). E nel Volume VII. de' suoi Opuscoli rigettando l' Ipotesi di quel parallelismo degli strati, adottò quella de' tubi fittizj di strettissimo diametro, e di cangiante figura, entro

(a) §. 110. Traitè des fluides.

(b) Leggete il *Saggio di una nuova Teorìa sulla Resistenza de' fluidi* del Signor d' Alembert, *ed i Vol.* 1, 5, 6, 8 *de' suoi Opuscoli*.

tro a' quali suppose discender l' acqua, che muovesi in un vase (*a*).

Metodo del Signor de la Grange sul Moto de' Fluidi.

§. 152. Niun metodo idraulico è più semplice, più diretto, e più universale di quello del Signor Luigi de la Grange, che qui vi espongo in brieve.

Sia m una massa fluida, di cui ciascuna particella Dm tenda a' centri fissi colle forze acceleratrici P, Q, R, &c, che sono funzioni delle di lei distanze p, q, r, &c. da essi centri. Ed intese quelle cose, che vi rapportai nel §. 272. della Statica; sarà in caso d' equilibrio

$$S\left(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.\right)Dm = 0$$

o pur riducendo le variabili p, q, r, s, &c. alle tre coordinate rettangole x, y, z (*b*),

V 3 S(X

(a) Questa diffidenza del Signor d' Alembert fù del pari precipitosa, che quella fidanza, onde il Signor Varignonio avea creduto agevole il dimostrarne a priori gl' impeti, e le velocità delle acque sgorganti da' fori.

(b) Anche il Sommo Eulero avea generalmente calcolato il moto di un fluido, rapportando ciascuna particella di tal corpo a tre direttrici rettangole. Vedi *Act. Berol. an.* 1755, 1760. e *Vol.* XIV. e XV. *Nov. Comm. Petrop.*

$$S\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \right) Dm = o$$

Ed aggiungendovi le nuove forze acceleratrici $ddx : dt^2$, $ddy : dt^2$, $ddz : dt^2$, come l' esige la condizion del moto di questo fluido, avrassi

$$S\left(\left(\frac{ddx}{dt^2}+X\right)\delta x + \left(\frac{ddy}{dt^2}+Y\right)\delta y \right.$$
$$\left. + \left(\frac{ddz}{dt^2}+Z\right)\delta z \right) Dm = o \qquad N$$

Or il volume di ciascuna particella di questo fluido può aversi come un parallelepipedo rettangolo, che ha per lati le Dx, Dy, Dz: ond' ei sarà uguale a $DxDyDz$. E supponendo essere *incompressibile* cotesto fluido; il volume della divisata particella non dovrà punto variare, qualunque siane il di lei moto. Dunque $DxDyDz =$ Cost. sarà quell'*Equazion di Condizione*, che converrà combinare coll' altra N, qualor si tratti de' movimenti de' fluidi incompressibili.

E se il fluido in moto sia elastico, ed ε esprima l' elaterio della particella Dm di tal fluido; sarà $\delta.(DxDyDz)$ la variazion del volume, che in essa vuol indursi dalla forza ε: e sarà $\varepsilon\delta.(DxDyDz)$ il momento di cotesta forza (191. Stat.), del quale dovrà tenersi conto nella formazione della formola N.

§. 153. Scol. Il più convenevole maneggio di questa formola, e la di lei applicazione a varj moti de' fluidi compressibili, ed incompressibili, può appararsi dalla Meccanica Analitica del Sommo Analista Luigi de la Grange Part. II. Sez. VIII., e IX.

CAP. VII.

Della resistenza de' Fluidi.

§. 154. Gli Spazj, onde si muovono i corpi celesti, ed i sullunari, non sono sgombri di materia, quasichè fossero della trina dimensione solamente adorni; ma son essi ripieni di fluido, le cui parti sono inerti, ed alquanto tenacemente tra se congiunte. Dunque un solido, che vi si muove, dee in ogn' istante spigner quelle particelle di fluido, che gli si paran d'avanti, e staccarle dalle adjacenti: e ad esse imprimendo una parte del suo moto rendersi men veloce di quel che ne sarebbe ito nel voto. E quindi le leggi, onde muovesi un solido ne' mezzi resistenti, son ben diverse da quelle, che in parità di altre cir-

 co-

costanze sarebbergli convenute ne' mezzi liberi: i principj fisici, da' quali esse derivansi, son differenti dagli usati: e gli artifizj di Geometria, ed i ripieghi Analitici, che convien praticarvi, esigono un nuovo, ed accurato magistero. Or queste cose non furon vedute da' Geometri anteriori al Gran Newton: non perchè questi Valentuomini aveano men acume de' Moderni; ma perchè in que' tempi eravi meno luce di verità naturali, e *di principj euristici*. Onde non è maraviglia, ch' essi abbiano interamente negletta la Teorìa di queste Resistenze, come se non vi fossero fluidi in Natura, o i fluidi non resistessero a' corpi solidi, che per entro vi si muovono.

§. 155. Ma per proceder con ordine, e con chiarezza, piacemi distinguere questo Trattato in due parti: nella prima delle quali vi ragiono del valor della resistenza, fatta da un fluido a quel solido, che muovesi entro di esso. E nell' altra m' ingegno dimostrarvi sinteticamente le leggi de' solidi, che progrediscono in un mezzo resistente, o projettati da forza straniera, o dal proprio peso animati.

§. 156. La resistenza di un solido mosso in un fluido, era sì difficile a valutarsi, che pareva trascendere i più sublimi ingegni de' Geometri, e da non potersi nè tampoco rascor-

correre dalla Natura. Ciò non ostante il Cavalier Newton ebbe il coraggio di tentar questo guado, e col suo esemplo trasse tanti altri Geometri a specolar queste cose, ed a confermarle colla sperienza. Su di che eccovene un' istoria ragionata.

§. 157. Il Geometra Inglese per isciorre questo Problema sì nodoso, distinse due generi di fluidi, o piuttosto contemplò la natura di un fluido in due diversi aspetti. Egli concepì un fluido *composto di globettini elastici, staccati fra loro, siti a distanze uguali, e con una costante forza centrifuga respignentisi l' un l' altro*. Onde tal fluido, non avendo a contatto le sue parti, dee esser molto raro, e non compresso. Oltre a questo ne concepì un' altro, *che avendo le di lui parti a contatto dee esser continuo, denso, e compresso*: com' è l' acqua, l' olio, il mercurio, ed altri simiglianti fluidi. E per determinar la resistenza, che fa ciascun di questi fluidi ad un solido, che vi si muove, adoperò le seguenti ingegnosissime ricerche.

PROP. XXIV. PROBL.

Esporre gli Artifizj del Cavalier Newton nell' investigare a priori le resistenze fatte da' fluidi a' solidi, che vi si muovono.

§. 158. METODO PE' PRIMI FLUIDI.

Sia A D C B un cilindro di materia soli-
Fig. 41. n. 2. da, e denso quanto quel fluido, ov'è immerso, e dove muovasi equabilmente per la direzion del suo asse Q P colla velocità V, ch'è dovuta ad un'altezza uguale alla Q P (159 Mecc.). Il cilindro di fluido B C N M sia uguale, e simile al solido A D C B, ed abbiano essi la comun base C B, ed a diritto i loro assi. E poi il cilindro di fluido intendasi diviso negli strati infinitesimi, ed uguali B C c b, b c d e, &c. Sarà chiaro, che all'imbatter del cilindro A D C B nel primo strato di fluido B C c b, tutte le particelle, che in questo contengonsi, debbano acquistare la velocità 2 V, cioè la dupla velocità del cilindro, per esser sommamente elastiche (522 Mec.). Ma son esse distanti e liberamente situate fra loro: dunque dovran risaltare pe' loro interstizj, senza urtarne le altre particelle, o sturbarne il moto del cilindro progrediente. Sicchè nel principio del secondo tempuscolo troverassi il cilindro ADCB colla sua base in b c, ove colla stessa velo-

cità V spignerà in simil guisa il secondo strato di fluido b c d e, impartendogli la dupla velocità del suo moto. E così in appresso. Con che se questo cilindro intendasi colla stessa velocità V progredire entro al fluido, fintantochè vi abbia percorso lo spazio P L, metà del suo asse Q P; la quantità di moto comunicata alle risaltanti particelle del fluido sarà quanto quella, che ha il cilindro in ogn' istante del suo progresso. Imperocchè, se dicasi M la massa del cilindro A D C B, e T il tempo, ond'ei percorre la P L colla velocità V, sarà M V la quantità di moto, che ha il cilindro in ogn' istante del tempo T. Ed essendo BCRS, o $\frac{1}{2}$ M la quantità delle particelle di fluido, che nel tempo T ne risaltano colla velocità 2 V; la loro quantità di moto alla fine del tempo T sarà $\frac{1}{2}$ M . 2 V = M V.

Or il tempo T è quarta parte di quello, che v' impiegherebbe il cilindro A D C B a trascorrer equabilmente colla velocità V lo spazio QO quadruplo di PL (9. Mecc.) o a calarne in un mezzo libero dall'altezza P Q (a), ch' è dovuta alla velocità V. Dunque la velocità, che alla fine del tempo T si acquisterebbe il cilindro ADCB, lasciatosi cadere verticalmente in un mezzo libero, sarà $\frac{1}{4}$V 2 im-

(a) §. 153. n. 3. Mecc.

imperocchè nella discesa verticale di un grave le velocità crescono come i tempi. E quindi sarà $\frac{1}{4}$ M V la quantità di moto, che alla fine del tempo T ne avrà conceputo questo cilindro discendente. E se la sua massa, o il suo peso fosse 4 M, la quantità di moto, che colla discesa verticale avrebbesi acquistato il cilindro 4 M alla fine del tempo T, sarà 4 M. $\frac{1}{4}$ V $=$ M V. Dunque il peso del cilindro 4 M ne genera nel tempo T tanto moto, quanto nello stesso tempo accrescesi alle risaltanti particelle di fluido. E quindi (138) la resistenza di questo fluido sarà uguale al peso del cilindro 4 M. Cioè *tal resistenza sarà quanto il peso di una colonna di fluido, che ha la base del cilindro progrediente, e per altezza la quadrupla di quella, ch' è dovuta alla velocità del di lui moto.*

§. 159. METODO PE' FLUIDI CONTINUI, E COMPRESSI.

Fig. 43. n. 2. Immaginatevi, dice il Newton nella Prop. 37. Lib. II. Princ., che il fondo del vase ACDB tocchi la superficie dell' acqua stagnante XY: e che l' acqua di esso vase ne scenda giù per lo Canale cilindrico E S T F verticalmente adattato al vase. In mezzo a questo Canale siavi posto orizzontalmente il cerchietto P Q, la cui periferia sia dalle pareti del Canale equidistante: e 'l fondo del vase, l' apertura del Canale, e l' ampiezza del cerchietto dicansi respettivamente A, a, α; sarà a—α quell' anello circolare, che resta tra il cerchietto, e 'l Canale. Inoltre protraggasi C A in K, sinchè stia CK : AK : : A : a—α; sarà dovuta all' altezza I G (a) la velocità, onde l' acqua trascorre per quello anello circolare. Or questa velocità dicasi V: e suppongasi infinita la capacità del vase rispetto all' apertura del Canale, onde I H debba essere infinitesima rispetto ad I G; la velocità V sarà dovuta all' altezza G H: e sarà la forza dell' acqua (b) scorrente sul cerchietto P Q, al peso d' acqua del cilindro P Q. $\frac{1}{2}$ G H, come a ad $a - \frac{\alpha}{2}$. Laonde esprimendosi per P il peso di questo cilindro; sarà cotesta forza dell' acqua imbattente nel cerchietto P Q, uguale ad a P : $\left(a - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Or chiudasi tanto l' orificio superiore, che l' inferiore del Canale, e 'l cerchietto, che dianzi erasi supposto immobile, ne salga con moto a se parallelo entro al Canale; sicchè l' acqua sia obbligata a discendere per quell' anel-

(a) Questa verità vien dimostrata dal Newton nel Cas. 6. Prop. 36. Lib. II. Princ.

(b) Quest' altra verità si è dimostrata dal Newton nel Coroll. 10. Prop. 36. Lib. II. Princ.

anello circolare, che resta tra 'l cerchietto, e 'l Canale. Sarà la velocità del cerchietto ascendente, alla velocità dell'acqua influente per un tal anello, come l'anello al cerchietto, cioè come $a-\alpha$ ad α, (99): e quindi la velocità del cerchietto, alla somma della di lui velocità, e di quella dell'acqua influente (a), cioè alla velocità relativa di quest'acqua influente, starà come $a-\alpha$ ad a. E supponendo, che questa velocità relativa dell'acqua influente sia uguale ad V, (velocità dovuta all'altezza HG): e che quella del cerchietto dicasi v; sarà $v : V :: a-\alpha : a$, e quindi $v = V(a-\alpha) : a$. Or se l'ampiezza del cerchietto si supponga picciolissima rispetto all'apertura del Canale, sicchè α sia disprezzabile rispetto ad a, dovrà essere $a - \frac{1}{2}\alpha = a$, $a-\alpha = a$, $v = V$, e la forza dell'acqua imbattente nel cerchietto PQ, ch' erasi mostrata uguale ad $aP : \left(a - \frac{\alpha}{2}\right)$, sarà quanto P. Cioè a dire *la resistenza del cerchietto PQ sarà quanto il peso di un cilindro d'acqua, il quale abbia per base esso cerchietto, e per altezza la metà di quella, ch'è dovuta alla celerità del di lui moto.*

Ri-

(a) La velocità relativa di due corpi, che muovonsi per opposte direzioni, è uguale alla somma delle velocità assolute di essi.

Riflessioni su queste Teorìe.

§. 160. Sebbene questi fluidi, che in secondo luogo ha esaminati l'illustre Newton, sieno reali, e non immaginarj; pure il metodo, di ch'ei si avvale per valutarne la loro resistenza, è fondato sulla Cateratta, la quale non è, che precaria, ed insufficiente. Ed oltre a ciò i risultati di tali ricerche son contraddetti dalle più sicure e adeguate sperienze. Ma l'essenza de' primi fluidi è un gruppo di precarie supposizioni; onde ogni ricerca, che può farvisi sarà un'indagine solamente curiosa, e non applicabile alla Natura (a). Quindi è, ch'io volentieri tra-

(a) Quì cade in acconcio prescrivere certi Canoni, onde un Geometra deesi guidare nella Contemplazion della Natura.

I. *La Geometria, e l'Analisi sieno le Ancelle della Natura, e non le faccian da Padrone, ora vestendola co' loro Dati, ora togliendole que' Dati, ch'ella ne porge.*

Questo abuso, ch'è sì frequente ne' Sommi Meccanici, fa, che le loro Teorìe appartengano al Mondo delle Astrazioni, non già a questo, cui le destinano: e che a loro scorno venga contraddetta, e smentita dalla Natura quella pratica, ch'essi ne derivano. Rileggete il princ. dell. Star.

II. *La Contemplazione della Natura non si opprima da quel treno di formole analitiche, di cui la piupparte non le appartengano.*

I Cervelli soverchio metafisici sogliono guardar la Natura a traverso de' sistemi delle loro teste: ed i gran cal-tralascio d'esaminar que' casi, che lo stesso Scrittore ha rapportati nella Prop. 35. Lib. II.: e sol vi reco un metodo, che vi si può trarre per valutare le resistenze de' solidi relativamente alle loro figure.

PROP.

calcolatori sovente si perdono nella considerazion di formole, di cui pochi casi appartengono alla Natura: sicchè molti Trattati fisico-matematici si possono avere per pure esercitazioni analitiche. Ma gli antichi Geometri Italiani, e tra gli Stranieri il Gran Newton, il Varignonio, Daniele Bernulli, Lambert, e qualche altro ne sono stati esenti di tal difetto.

III. *Quell' Analista, che brami essere fedele Interprete della Natura, si eserciti bene a rilevar le leggi de' fenomeni naturali tanto dalle loro cause efficienti, che dalle finali.*

Questa seconda indagine, di che vi ragionai nella nota (a) del §. 306. della Meccanica, è più ardua della prima.

IV. *Finalmente lo stesso Analista si eserciti nel metodo di trovar le leggi de' fenomeni naturali dalle loro osservazioni.*

Questo Metodo è stato chiarito da' Signori de la Grange, e 'l Marchese de Condorcet alla fine del Tratt. Nouvelles experiences sur la resistance des fluides.

PROP. XXV. PROBL.

§. 161. *Il Solido, nato dalla rivoluzione della Curva AGI intorno al suo asse IG, muovasi nel primo di questi fluidi* (158) *per la direzione di tal asse, precedendone il suo vertice; vuol determinarsi la sua resistenza.* Fig. 46.

Soluz. Da un qualunque punto C preso nel perimetro della Curva AGI, generatrice del dato Solido, le si ordini all' asse la retta CO, e vi si conduca la Normale CN. Di poi distesa da C la CM parallela all' asse IG, si protragga tal retta al di là della base di essa Curva, quanto ne piaccia, vale a dire, che la MS sia di una costante magnitudine. E, compito il rettangolo AQLG; si tronchi MP, che stia ad MS in duplicata ragione della Sunnormale NO alla Normale NC. E ciò sempre facendosi ne nasca per *apposizion* di punti la Curva APL, la quale intendasi rivolta col rettangolo AQLG intorno ad LG. Dico *essere l' addimandata resistenza del Solido, a quella, che ne avrebbe il cilindro circoscrittibile ad esso, movendosi per la direzion del suo asse nello stesso fluido, e colla velocità di quel Solido, come lo spazio generato dalla Curva ALG al cilindro di AQLG.*

Dim. Le rette QA, SM protraggansi, finchè incontrino in K, ed R la tangente verti-

X ti-

ticale IK della Curva generatrice del Solido: e presa CD uguale ad MS, si meni dal punto D la retta DT perpendicolare alla Normale NC protratta fuori la Curva. Finalmente si compia il parallelogrammo CTDF: si abbassi TH perpendicolare su di CD: e dal punto c vicinissimo a C si tiri cr parallela a CR.

Ciò posto, la resistenza, che soffre l'elemento Cc di questa Curva dal fluido, entro al quale ella si muove per GI colla velocità costante V, è quanto l'impressione, che vi farebbe il fluido, imbattendo colla celerità V per la direzione RC nello stesso elemento Cc fermo, ed immobile. Con che esprimendosi per CD cotesta impressione diretta fatta sull'elemento Cc; sarà CT il momento, o l'energia (a) di tale impressione. Or la forza CT si risolva nelle due laterali CH, Ch, di cui la prima abbia la direzione parallela all'asse IG, e la direzion dell'altra gli sia perpendicolare. Sarà chiaro doversi elidere la forza Ch dalla sua uguale, e contraria, che in simil guisa si deriva nell'archetto Ee corrispondente all'altro Cc. Onde sarà HC l'effettiva forza, colla quale il fluido spigne l'elemento Cc per la direzione CM parallela all'asse della curva. Dunque

(a) §. 222. Mec. n. III.

que sarà tal forza, all'impressione diretta, che fa il fluido su di Cc, o su di Rr, come CH a CD, cioè in duplicata ragione di CT a CD (a), o di ON ad NC (b), cioè (per costr.) come MP ad MS, o come il rettangoletto MmpP all'altro MmsS.

Intanto lo spazio QKIL intendasi compierne intorno ad IL una perfetta rivoluzione: e 'l divisato ragionamento si adatti a ciascun'armilla cilindrica del Solido AIB, ed all'anello circolare, che le corrisponde nel cerchio di IK. Sarà la forza, con cui tal fluido spigne per IG la superficie generata dalla Curva ACI, all'impressione, ch'ei fa sul cerchio del raggio IK, come lo spazio generato dalla rivoluzione del curvilineo ALG intorno a GL, al cilindro che vi genera il rettangolo AQLG rivolto intorno ad LG. E nella ragion di questi due solidi sarà pure la resistenza del Solido AIB a quella, che ne avrebbe il cilindro circoscrittibile ad esso Solido, qualora muovansi entrambi con velocità uguali per le direzioni de' loro assi. C.B.D. (c).

X 2 §. 162.

(a) Cor. Prop. 8. Elem. VI., e Defin. 10. El. V.

(b) Essendo equiangoli, e simili i due triangoli CTD, CON.

(c) Il P. Frisi dottissimo Fisico Italiano, per rinvenir nel Capo 7. de' Principj della sua Idraulica le resistenze de' solidi mossi ne' fluidi, si è prevaluto di questo principio di Geometria, *che in ogni curva la somma de' quadrati delle normali sia dupla della somma de'*

§. 162. Esemp. Suppongasi essere un' emisfero il Solido A I B, e che il suo centro sia G; sarà MP ad MS, come GO^2, o CM^2 a GC^2, o come il rettangolo A M B all' altro A G B (*a*). Dunque sarà P M : L G : : A M B : A G B: e la curva A L B sarà una Parabola conica (*b*): la di cui Conoide generata dalla di lei rivoluzione intorno ad L G sarà una metà del cilindro circoscrittole (*c*). Dunque *la resistenza, che soffre una sfera mossa in tal fluido, sarà metà di quella, che ne avrebbe il cilindro circoscrittibile ad essa, qualora ei muovasi nello stesso fluido per la direzione del suo asse, e colla velocità della sfera.*

Metodi di altri Geometri per rinvenir le resistenze de' Solidi mossi ne' fluidi.

§. 163. Gli altri Geometri, che con metodi diversi dal Newtoniano han voluto indagar le resistenze de' solidi ne' fluidi, non sono stati più avventurosi del Geometra Inglese: e può dirsi, che siensi occupati a simplificar le formole analitiche delle resistenze, e non a rettificarne i principj fisici di tali

de' quadrati delle loro sunnormali. Lo che apertamente è falso.

(a) Prop. 35. El. III.
(b) Cor. 1. Prop. 11. Con. Gian. Lib. I.
(c) Prop. 24. dello stesso.

tali forze. Che anzi lo stesso Daniele Bernulli, che sembra tra essi il più sagace, ha supposto in una Dissertazione inserita nel II. Volume degli Atti Antichi di Pietroburgo, che le particelle del fluido percosse dal mobile ne riflettessero in guisa, da non poter più incorrere in altre particelle dello stesso fluido: quasichè si annientassero nel momento del loro urto. Ma questo Valentuomo nel VIII. Volume degli stessi Atti ha rapportato un' altro metodo più ingegnoso, e sicuro del precedente, che giova quì esibirvelo.

§. 164. Presso al fondo del vase cilindrico C A B F, il di cui asse sia verticale, adattisi orizzontalmente il tubolino VO aperto ne' suoi estremi, e che una metà di esso stia entro al vase, e l' altra al di fuori: affinchè l' acqua, che per esso ne zampilli, non formi verun gorgo dentro al vase, nè vi si contragga al di fuori. Rimpetto al tubolino V O si fermi la Leva angolare *p I c* volubile intorno ad *f*, la quale abbia uguali le sue braccia *p I*, *I c*, commesse a squadra nel punto *I*. All' estremo del braccio orizzontale *Ip* possa applicarsi un peso, laddove nell' estremo *c* dell' altro braccio verticale *I c* siavi una lamina circolare *c*, ove possa riceversi l' urto diretto dell' acqua zampillante dal tubolino *V O*. Riempiasi d' acqua il vase CABF, *Fig.41. n. 1.*

si apra il foro O del tubolino VO, ed in p si applichi un peso valevole a mantenere in sito orizzontale il braccio Ip della Leva, ed in sito verticale l'altro braccio Ic, che sostien l'urto diretto dell'acqua zampillante per Oc. Sarà l'urto di quest'acqua quanto il suo equivalente (64. Stat.) peso p, che dal Bernulli fu trovato *uguale ad una colonna d'acqua avente per base il foro* O, *e per altezza la dupla distanza di esso dal livello dell'acqua*.

§. 165. Ma questo metodo non è esatto, nè corrispondente alle sperienze: poichè non vi si tien conto dell'acqua rimbalzata dalla laminetta c.

§. 166. Il Metodo del Grand'Eulero proposto nella di lui Architettura Navale è commendabile per la sua semplicità: e sarebbe vero, se dalle forze dell'acqua stagnante si potesse immediatamente raccorre quella dell'acqua fluente. Immaginatevi (ecco il di lui discorso), che al fondo orizzontale di un qualunque vase vi stia un foro, il quale per mezzo di una lamina esteriore tengasi ben chiuso. Di poi si riempia d'acqua cotesto vase: e quando tal fluido vi sarà stagnante, si scosti pochissimo la lamina dal foro; ond'ella ne riceva l'urto diretto dell'acqua sgorgante. Non sarà quest'urto, quanto la pres-

sione, che dianzi vi faceva l'acqua sulla lamina? e con ciò *quanto il peso del cilindro d'acqua, il quale ha per base il foro, e per altezza la distanza del foro dal livello dell'acqua?* (25).

§. 167. Ma intanto nè l'acume de' Geometri, nè la luce della moderna Analisi valse a far loro conoscere i giusti valori, ed i veri rapporti di coteste resistenze: ond'essi tralasciando le pure teoriche speculazioni vidersi obbligati d'accostarsi alla Natura per interrogarnela colla voce della sperienza. E poichè questi loro tentativi non erano diretti alla sola cognizione de' moti ne' mezzi resistenti; ma alla perfezion dell'*Architettura Navale*, e *della Statica de' fluidi in moto*; anche le Società Accademiche, ed i Promotori del Publico Bene vi accorsero a secondarli. Ed in vero sotto gli auspicj della Real Accademia delle Scienze di Parigi si fecero nel 1679. varie sperienze sull'impeto di una vena d'acqua cadente su di un piano: e si raccolse (forse per prevenzione di ciò, che avea potuto dire (*a*) il Mariotte), che una tal forza era quanto il peso di una colonna d'acqua, avente per base il foro, ond'ella sgorgava, e per altezza l'altezza del fluido.

(a) Reg. II. Disc. 3. Par. II.

Laddove il Signor Krafft, rifacendo per ordine dell' Accademia di Pietroburgo le sperienze di Daniele Bernulli, scrisse nel 1737., *essere la divisata forza pressochè dupla di quella, ch' erasi trovata dagli Accademici Parigini*.

§. 168. Per alquanti anni i Geometri si rimasero *inoperosi* nello scandagliare tali forze. Ma dal 1763. fino al 1776. ne furon prodotte le più compite, e decisive opere, i cui risultati mi fo un dovere rapportarveli.

§. 169. L' ingegnosissimo Cavalier de Borda adoperando una banderuola, che in virtù di un peso facevasi muovere verticalmente nell' aria, ed orizzontalmente nell' acqua, rilevò i valori, ed i rapporti delle resistenze de' solidi mossi nell' aria, e nell' acqua (*a*): e ne compì due dotte Dissertazioni, che leggonsi nell. Mem. de l' Acc. de. Scien. an. 1663, 1667. Verso il 1770 apparve nell' Accademia di Marina di Brest una bella Dissertazione del Signor Marguerie, il quale dall' esperienze del Signor Thevenard avea raccolte molte verità su tal Soggetto. E nel 1771

(a) Da' risultati delle sperienze del Cavalier de Borda raccogliesi *esser la resistenza di una sfera*, $\frac{2}{5}$ *di quella del cilindro circoscrittibile ad essa, posto, che questi solidi con uguali velocità si movessero in uno stesso fluido per le direzioni de' loro assi*.

1771 il valentissimo Geometra Spagnuolo D. Giorgio Ivan Commendatore de Aliaga, e Capo Squadra di S. M. Cattolica diè in luce una ragionatissima Opera sulle Resistenze de' fluidi (*a*): ove tra le altre nuove indagini evvi, che i valori di queste forze non solo dipendano dalla densità del fluido, dalla celerità del mobile, e dall' incidenza del fluido nel solido; ma puranche dalle diverse profondità, che ha esso mobile dentro al fluido. Onde dalle sperienze, e ragionamenti di questo Gran Geometra può trarsi il seguente Teorema generale. „ Cioè la resistenza di un solido mosso in un fluido è in ragion composta della densità del fluido, della celerità del mobile, della di lui superficie percossa dal fluido, del seno dell' angolo d' incidenza, e della radice quadra della profondità di esso mobile nel fluido". Ma un tal Teorema, com' ei lo avverte, non sarà vero, se la parte anteriore del

(a) Questa Opera è in idioma Spagnuolo, divisa in due Vol. in 4, ed ha per titolo *Esame Marittimo Teorico pratico, o Trattato di Meccanica applicato alla costruzione, cognizione, e maneggio delle Navi, ed altre Imbarcazioni*.

Nel Vol. 51. delle Transaz. Anglic. evvi una consimile Dissertazione del Signor Smeaton, la quale s' intitola *Esame sperimentale intorno alle forze naturali dell' acqua, e del vento nel muovere in giro i mulini, ed altre simili Macchine*.

del mobile non sia simile ed uguale alla posteriore ; e se il solido non istia tutto immerso nel fluido .

§. 170. Ma finalmente i Sommi Analisti il Signor d'Alembert, il Marchese di Contorcet, e l'Abb. Bossut han determinato coteste resistenze colla luce delle più chiare sperienze, e cogli artifizj della più saggia speculazione : secondando le ottime mire del Signor Turgot *Controloro* Generale delle Finanze di Francia, il quale gli avea incaricati d'indagare i mezzi, onde perfezionarsi l'interna navigazione di tal Regno, ed accordò loro a tal uopo de' ricchi fondi . I risultati di siffatte sperienze, che si possono adottar quali Assiomi, sono i seguenti (*a*).

1. *La Resistenza perpendicolare, o diretta di un piano, che cammina con moto a sè parallelo in un fluido indefinito, è quanto il peso della colonna dello stesso fluido, che ha per base il dato piano, e per altezza quella, ch' è dovuta alla celerità del di lui moto.*

2. *La Resistenza, che un tal piano soffre in un fluido ristretto in un Canale, o di basso fondo, è maggior di quella, ch' esso piano in parità di altre circostanze soffrirebbe dallo stesso fluido indefinito.*

3. La

(a) Nouvelles Experiences sur la resis. des fluid.

3. *La Resistenza, che fa un fluido ad un piano, il quale vi si muova ora con una velocità, ed ora con un' altra, è quasi, in parità di altre circostanze, come il quadrato della velocità del piano.*

4. *Le Resistenze perpendicolari, e dirette, che incontrano piani disuguali al muoversi con velocità uguali entro ad uno stesso fluido, son quasi proporzionali alle grandezze di essi piani.*

5. *Le Resistenze provenienti da' moti obbliqui sono come i quadrati de' seni degli angoli d' incidenza: quando le altre circostanze vadan del pari, ed essi angoli d' incidenza non sieno minori di 50°.*

6. *La Tenacità dell' acqua può riguardarsi come una forza infinitesima rispetto alla resistenza, che dall' inerzia di esso fluido ne proviene. Ed è anche picciolissimo lo sfregamento dell' acqua lungo le pareti di quel solido, che vi nuota.*

§. 171. Esemp. Eccovi un' esemplo, che ne rischiara coteste Teorìe. Un piano immobile *p*, la di cui superficie sia un palmo quadrato, riceva l'urto diretto di una corrente d'acqua indefinita. La velocità di quest' acqua sia 3. palmi, cioè questa ne fluisca per 3. palmi in un secondo; sarà la velocità 3 dovuta all' altezza $\frac{225}{1857}$ palm. Imperocchè ponendo uguale ad *a* una tale altezza, e sostituendo

palm.

palm.18.,57, in luogo degli equivalenti pied.parig.$15+\frac{1}{12}$; sarà (not.b.114) $3=2\sqrt{(18,57)}\,a$: e quindi $a=\frac{225}{1857}$. Con che essendo l'urto, che riceve dall'acqua il piano p, uguale al peso dell'acqua contenuta nel volume ap (n. I. §. 168.); sarà un tal urto uguale al peso di $\frac{225}{1857}$ palm. cub. d'acqua, il quale ad un di presso ascende a $3\frac{1}{2}$ rotol. napol. Imperciocchè (a. 47) ogni palmo cubo d'acqua è 20 rot. e 13. onc.

Che se l'acqua incorrente nel piano p fosse ristretta in un canale, e non indefinita; il di lei urto sarà quasi duplo di tal peso, o quasi uguale a rot. 5.

CAP. VIII.

DEL MOTO DE' CORPI SOLIDI NE' MEZZI RESISTENTI.

§. 172. Ass. La resistenza recata da un fluido a quel solido, che vi si muove, può aversi per una forza continuamente applicata ad esso mobile per ritardarne il di lui corso. Ond'ella sarà come il decremento di velocità, che in un dato tempuscolo ne soffre il mobile (123 Mecc.).

§. 173. Defin. XIII. Quella funzione della velocità di un mobile, cui è proporzionale la resistenza recatagli dal fluido, ov'ei si muove, dicesi *Legge*, o *Ipotesi di Resistenza*.

§. 174. Scol. I. Un solido, che si muove dentro ad un fluido, v' incontra una resistenza maggiore, o minore, secondochè più celere, o più lento quivi ne cammina. Dunque v'è un certo rapporto tra la celerità del mobile, e 'l valor della resistenza, che il fluido gli reca: ed ei dicesi legge, o ipotesi di resistenza. Così se la resistenza di un fluido suppongasi proporzionale al quadrato della celerità del solido che vi si muove; *il quadrato della celerità* *del Solido sarà la legge della resistenza del fluido*.

§. 175. Scol. II. I Geometri Moderni seguendo le orme del Gran Newton sogliono considerare due principali leggi di resistenze; di cui una è *proporzionale alla celerità del mobile*, e l'altra *al di lei quadrato*. Quella credesi nascere dalla tenacità del fluido, quest'altra dall'inerzia di esso.

§. 176. Defin. XIV. *Esponente della Resistenza di un fluido* è quell'altezza, da cui naturalmente dovrebbe discendere un Solido, per acquistarsi tanta velocità, con quanta penetrandone il fluido v'incontrerebbe una resistenza uguale al suo peso.

§. 177. Scol. Come cangia la celerità di un Solido muoventesi entro di un fluido, così varia la forza della resistenza, che questo a quello ne arreca. Dunque può concepirsi, che il mobile abbia nel fluido una velocità tale, che la sua resistenza pareggi il proprio peso: ed in tal caso l'altezza dovuta a questa celerità del solido dirassi esponente della resistenza del fluido. Di questo esponente della resistenza avvalgonsi i Sommi Analisti nel calcolare convenevolmente i moti de' solidi ne' fluidi. Vedi Eulero Mecc. Analit. pag. 156. Vol. I.

§. 178. Defin. XV. Quel mezzo, che abbia ovunque la stessa legge, e lo stesso esponente della resistenza, dicesi *Similare*.

§. 179. Cor. Un fluido omogeneo, penetrato da uno stesso grado di calore, non è, che un mezzo similare.

§. 180. Scol. De' moti de' Solidi ne' mezzi similari io principalmente quì ragiono: e tra le molte leggi di resistenze trascelgo quelle due, che vi ho nel §.175 indicate, e che soglion dimostrarsi *a priori* nel seguente modo.

§. 181. „ Un Solido, che col suo moto va penetrando un fluido similare, che sia solamente tenace, dee in ogni punto del suo cammino staccare un dato numero di gocce di fluido dalle loro adjacenti, vincendone la coerenza di queste a quelle. Or questa forza non è che la stessa. Dunque il mobile dee in ogni punto del suo cammino perdere una stessa parte del suo moto, ed una stessa parte della velocità, ch'ei tiene. E quindi il decremento della velocità del mobile sarà come lo spazietto, ch'ei ne descrive nel fluido. Ma la resistenza di un mezzo, è proporzionale al decremento della velocità sofferto dal mobile (172) in un dato tempuscolo. Dunque sarà tal resistenza come lo spazietto descritto dal mobile in un dato tempuscolo, cioè come la celerità di esso (8 Mecc.) ".

§. 182. Ma come mai può naturalmente

accadere, che cotesto mobile spignendo le particelle del fluido, ov' ei si muove, solamente le distacchi dalle loro adjacenti, e ad esse non imprima verun moto ? Dunque questa Ipotesi di resistenza, che proponesi proporzionale alla celerità del mobile, non è, che *matematica*, *ed astratta* : ed è poi *naturale* quest' altra, che quì vi dichiaro.

§. 183. Quando vogliasi por mente all' inerzia del fluido penetrato da un mobile, tal resistenza è come la densità del fluido, e come il quadrato della velocità del mobile. Imperciocchè „ la resistenza, che offre il fluido a quel solido, che per entro „ vi si muove, è come il numero delle „ gocce del fluido percosse in un tempuscolo dal mobile, e come la forza, ond' ei „ le percuote. Ma questa forza, per esser „ data la massa del mobile, segue la ragione della velocità di esso : e 'l numero delle gocce di fluido spinte dal mobile in un „ dato tempuscolo è come la densità del „ fluido, e come lo spazio, che quivi in „ quel tempuscolo il mobile descrive, cioè „ come la velocità di esso mobile (8 Mecc.). „ Dunque la medesima resistenza sarà come „ la velocità del mobile, come la densità del „ fluido, e di nuovo come la velocità del mobile : cioè tal resistenza sarà proporzionale „ alla densità del fluido, ed al quadrato della „ velocità del mobile „. Ma questo argo-

mento

mento non farà forza sul nostro spirito, ove si vogliano considerar que' tanti diversi moti, che in tal rincontro si eccitano sì nelle particelle del fluido circonstanti al mobile, che nelle posteriori ad esso. E niun Geometra dovrebbe aver l' ardimento di adottare in pratica cotesta ipotesi, se l' esperienza non gliela mostrasse vera (*a*).

§. 184. Or esaminando a dentro queste Ipotesi, s' incontrano due insigni paradossi, che prima di dimostrarveli vo' quì enunciarli solamente ; affinchè l' attenzione di già si desti nel vostro spirito ad intender Teorìe sì sublimi (*b*).

Y I°. Un

(a) Leggete quanto vi ho rapportato nel Cap. prec.

(b) Il Cavalier Newton fu il primo tra' Meccanici, che colla face della Geometrìa spiò *i moti ne' mezzi resistenti*, e seppe compierne quelle ingegnose Teorìe, che leggonsi nel II. Lib. de' suoi Principj. E poichè all' apparir delle verità sublimi, e luminose tosto si destano i Grand' Ingegni ad ampliarle ; il Signor Giovanni Wallis ordinando certe sue riflessioni *sul moto de' corpi ne' mezzi resistenti come le velocità*, ne compose una Memoria, che fu registrata *nelle Trans. Angl.* del 1687 : e 'l Gran Leibnitz fe nell' anno 1689 inserire negli *Atti di Lipsia* un' elegante Dissertazione sul moto de' solidi ne' mezzi resistenti, il sistema della quale è stato seguito dall' Ermanno nella Foronomìa. Nel 1690 l' acutissimo Ugenio dimostrò queste Teorìe con quel geometrico nitore, ond' ei distinguesi tra' moderni : esponendole alla fine del suo Trattato *della causa della gravità*

I°. *Un corpo spinto con forza istantanea finita in un mezzo similare, che continuamente gli resista come la di lui velocità, o in duplicata ragion di essa, non ridurrassi mai alla quiete: tuttocchè tal moto vie più s' allenti. E proiettandosi in un mezzo resistente come la velocità del suo moto, non potrà mai terminare un certo spazio finito, ancorchè ne passi un infinito tempo.*

II°. *Un grave uniformemente animato dal suo peso, se si lasci giù cadere in ciascun di questi mezzi, andrà con moto accelerato: ma la sua velocità non potrà mai adeguare, non che sorpassare un certo grado finito, ancorchè tal moto si continui all' infinito.*

§. 185. DEFIN. XVI. Questo grado di velocità dicevasi *velocità terminale* dall' Ugenio, e *massima* dal Leibnitz.

PROP.

vità de' corpi. E nel principio di questo secolo l' insigne Geometra Pietro Varignonio innestò l' Analisi moderna alla *Scienza delle Resistenze de' fluidi*, e ne propose delle formole negli Atti dell' Acc. delle Scien. an. 1707, 1708, 1709, 1710, che adottaronsi dal Wolfio nella di lui Meccanica. Ma era serbato al Grand' Eulero il darne su di ciò le più semplici, ed universali formole, e di agevolarne il maneggio, e la separazione di quelle indeterminate, onde tai calcoli sovente avviluppansi. Vedi *la Mecc. Anal. dell' Euler.* Vol. I. e II.

PROP. XXVI. PROBL.

§. 186. *Spingasi un globo con una forza istantanea finita entro di un fluido, che in ragion della di lui velocità vadagli continuamente resistendo; esporre le leggi di tal moto.* Fig. 47.

COSTR. Sia spinto cotesto globo dal luogo A per la direzione AB, e la retta AE perpendicolare alla stessa AB nel punto A dinoti la velocità iniziale del globo: e l'altra MC perpendicolare alla medesima AB in M esponga quella velocità, che rimane al mobile, dopo aver ei percorso lo spazio AM in tal mezzo resistente. Si unisca la retta EC, e si protragga, sinchè incontri in B la direzione del mobile. Ed in fine col centro B, e cogli assintoti rettangoli BA, BX, si descriva un' iperbole conica, che abbia una qualunque potenza. Io dico, *che le velocità del mobile ne' luoghi*, A, M, N, &c. *sieno proporzionali alle ordinate* AE, MC, NP, &c. *del triangolo* EAB: *e che i tempi, ond' ei descrive gli spazj* AN, AM, &c, *debbano essere come le aje assintotiche* ATSM, ATQN, &c.

DIM. Si prendano ne' due spazj AM, MN le particelle Aa, Mm infinitesime, e proporzionali ad essi. Saranno i decrementi di velocità, che soffre il mobile in trascorrendole, come le forze che quivi gli resistono, e come i tempuscoli (172.). Ma

tali

tali forze son dall' ipotesi come le velocità; onde il mobile trascorre i medesimi spazietti: ed i tempuscoli sono direttamente come questi spazietti, ed inversamente come quelle velocità (15. Mecc.). Dunque saranno i decrementi di velocità, che soffre esso mobile in descrivendo gli spazietti Aa, Mm, in ragion composta di AE : MC, di Aa : Mm, e di MC : AE: cioè Er starà a Cn, come Aa ad Mm (a). E quindi tutte le Er a tutte le Cn, cioè EL a CF sarà come AM ad MN (b), o come LC ad FP. Dunque la scala delle velocità del mobile sarà la retta, che passa pe' punti E, e C.

E poichè i tempuscoli, onde cotesto mobile trascorre i due spazietti Aa, Mm, sono (15. Mecc.) come Aa ad Mm, e come CM ad EA: ed è poi CM ad EA, come BM a BA, o come (c) AT ad MS; saranno i medesimi tempuscoli come Aa ad Mm, e come AT ad MS, cioè come il rettangoletto AatT all'altro MmsS. E quindi (d) il tempo per AM al tempo per MN sarà come l'aja iperbolica AMST all'altra MNQS. E sarà *comp. ed inv.* il tempo per AM

(a) Pren. III. Mecc.
(b) Prop. 12. El. V.
(c) Cor. 2. Prop. 20. Lib. III. Con. Gian.
(d) Pren. VI. Vol. I.

AM al tempo per AN, come lo spazio assintotico ATSM all'altro ATQN. C. B. D.

§. 187. Cor. I. Per la similitudine de' triangoli ECL, CPF sta EL:CF::CL:PF::AM:MN. E per essere simili gli altri due CBM, PBN è ancora CM : PN :: BM : BN.

§. 188. Cor. II. Dunque *le velocità, che perde un globo lanciato entro di tal fluido con una forza istantanea finita, sono come gli spazj, ch' ei vi trascorre. E le velocità, che gliene rimangono, son proporzionali a que' spazj, ch' ei dee descrivere, sinchè si estingua il suo moto.*

§. 189. Cor. III. E 'l tempo, in che cotesto mobile descrive un qualche spazio, è come il log-mo della ragione della velocità iniziale alla finale. Sicchè *essendo le velocità come i numeri, i tempi saranno come i loro log-mi.*

§. 190. Scol. Che se i tempi vogliansi dinotare per le ascisse AI, AM, AB, &c. della curva ROF: e per le loro corrispondenti ordinate HI, OM, SB, &c. esprimansi le velocità residue del divisato mobile; tal curva sarà una Logistica (a). E gli spazj descritti ne' tempi AI, AM, AB, &c. essendo come le aje RAIH, RAMO, RABS, &c. *Fig. 48.*

(a) Defin. Pren. IV. Vol. II.

&c. (*a*), saran pure come le Q H, T O, C S, &c. (*b*), le quali sono come le velocità perdute dal mobile.

PROP. XXVII. TEOR.

§. 191. *Poste le medesime cose della prec. prop. se prendasi A B ad A M, come la velocità iniziale del mobile a quella, che gliene resta dopo aver ei trascorso lo spazio A M; la retta A B, ch'è di finita grandezza, ne sarà trascorsa in un tempo infinito.* Fig. 47.

Dim. Imperocchè il tempo, nel quale il mobile descrive lo spazio A B, è disegnato dall'aja assintotica A T Q X B dell'Iperbole conica T S Q (*c*). Ma tal aja non è, che infinita (*d*). Dunque ci vorrà un tempo infinito, affinchè il mobile proiettato in questo fluido colla velocità A E descriva lo spazio finito A B. C. B. D.

§. 192. Cor. I. Lo stesso globo si lanci colla medesima velocità A E in un'altro fluido, che gli resista colla stessa legge; ma ei vi

(a) Leggete la conchiusione della Prop. V. Mecc.
(b) Cor. 2. Prop. IV. Pren. IV. Vol. II.
(c) Conchiusione del Probl. prec.
(d) Cor. 4. Prop. 22. Lib. III. Con. Giann.

vi perda la parte E G della sua velocità iniziale alla fine del dato spazio A M. Si prenda in M C la parte M F uguale A G, e si unisca la retta E F, la quale incontri in R l'assintoto A B dell'Iperbole T S Q; sarà A R lo *spazio massimo*, che lo stesso globo n'è determinato a descrivere in questo fluido.

§. 193. Cor. II. E poichè pe' triangoli simili E L C, E A B sta E L : L C : : E A : A B: ed è pure, per la simiglianza degli altri due E G F, E A R, G F : G E : : A R : E A; sarà per uguaglianza perturbata E L : E G : : A R : A B.

§. 194. Cor. III. Vale a dire *gli spazj massimi, che due globi uguali lanciati con forze uguali sarebber determinati a descrivere in due diversi fluidi resistenti come le velocità di essi, saranno inversamente, come le velocità perdute da essi globi alla fine di uguali spazj iniziali.*

PROP. XXVIII. PROBL.

§. 195. *Determinare il moto di un corpo, che si lasci verticalmente cadere entro ad un mezzo similare, che gli resista come la velocità del di lui moto.*

Sol. Immaginatevi, che cotesto globo abbia la sua densità uniformemente ripartita pel volume, e che il suo peso relativo sia rappresentato dal rettangolo R r a A. Si prolunghi A a verso E, e coll'assintoto A E, e col- Fig. 48.

e colla sottangente AX uguale ad RA si descriva la Logistica RHF. Io dico, *che se i tempi delle discese del globo, computati dal principio del di lui moto, esprimansi per le ascisse* RQ,RT,RC, &c. *di questa curva, le corrispondenti loro ordinate* QH, TO, CS, &c. *debbano essere come le velocità, che ha il globo alla fine di que' tempi. E gli spazj descritti in que' medesimi tempi saran proporzionali alle* Hh, Oo, Ss, &c.

Dim. Gli elementi RPpr, RNnr, &c. del rettangolo RAar dinotino le resistenze, che offre il fluido al globo nel principio del di lui moto, nel secondo tempuscolo, nel terzo, &c: dovranno i rimanenti rettangoli APpa, ANna, ADda, &c. esprimer le forze acceleratrici (*a*) dello stesso globo nel secondo tempuscolo, nel terzo, nel quarto, &c. Ma i rettangoli ugualmente alti RPpr, RNnr, RDdr, &c, ch' esprimono le resistenze sofferte dal mobile nel 1°. tempuscolo, nel 2.°, nel 3.°, &c. sono proporzionali alle loro basi RP, RN, RD, &c. Dunque queste rette potran dinotare le velocità, onde alla fine de' divisati tempuscoli si muove il globo: imperciocchè in tal ipotesi le velocità del mobile sono come le resistenze, che il fluido gli oppone. E quin-

(a) Prendendosi per unità la massa di tal globo; la di lui forza acceleratrice sarà l'eccesso del di lui peso relativo sulla resistenza del fluido. §. 91. Mecc.

quindi le rette RP, PN, ND, &c. dovranno esprimere quegl' incrementi di velocità, che in ciascun di questi tempuscoli ne avrà generati nel globo l'eccesso del di lui peso relativo sulla resistenza del fluido. Ma quegl' incrementi (106 Mecc.) sono come queste forze: dunque saranno le rette RP, PN, ND, &c, ch' esprimono quegl' incrementi, come i rettangoli ugualmente alti APpa, ANna, ADda, &c., che ne dinotano le forze acceleratrici, o come le loro basi AP, AN, AD, &c. Sicchè (*a*) le rette AR, AP, AN, AD, &c. proporzionali alle loro differenze dovranno essere in continua proporzione.

Pe' punti P, N, D, &c. si conducano le PH, NO, DS, &c parallele ad AE, che incontrino la Logistica in H, O, S, &c: e si compiano i parallelogrammi PAIH,NAMO,DABS, &c; saranno le rette RA, HI, OM, SB, &c. continuamente proporzionali: e le rette AI, IM, MB, &c., o le loro uguali RQ, QT, TC, &c. dovran pareggiarsi (*b*), e con ciò dinoteranno que' tempuscoli, in che sono stati generati gli elementi di velocità RP, PN, ND, &c. Dunque i tempi presi dal principio della

(a) *Le grandezze A', B, C, D*, &c. *saranno continuamente proporzionali, se mai si trovino proporzionali alle loro differenze, cioè se stia* A:A—B::B:B—C::C:C—D &c. Imperocchè essendo A:A—B::B:B—C::C:C—D &c, sarà convertendo A:B::C:D &c.

(b) Pren. IV. n. 1.

la discesa del mobile saranno espressi dalle ascisse R Q, R T, R C, &c: le velocità finali dalle ordinate Q H, T O, C S, &c: e gli spazj descritti in que' tempi, dovendo essere come le aje R Q H, R T O, R C S, &c (23. n. 1. Mecc.), saranno come le H h, O o, S s, &c (*a*) respettivamente. C. B. D.

§. 196. Cor. I. La Logistica R O F non può convenir mai col suo assintoto A E, per quanto si continui sì questo, che quella (*b*). Dunque le sue ordinate Q H, T O, C S, &c, ch' esprimono le velocità del grave alla fine de' tempi R Q, R T, R C, &c, andranno sempre più crescendo, senza poter mai adeguare la G E, o la R A, non che superarla.

§. 197. Cor. II. Sicchè la velocità terminale di un grave, che si lasci discendere verticalmente entro di questo fluido, sarà dinotata dalla R A (185).

§. 198. Cor. III. E poichè sta GF:GE:: R K : R A :: R K k r : R A a r; *sarà la velocità acquistatasi dal grave alla fine del tempo* R G *alla sua velocità terminale, come la resistenza, ch' ei soffre nella fine di quel tempo, al di lui peso relativo.*

§. 199. Cor. IV. Lo spazio descritto nel tempo

(a) Pren. IV. §. 21.
(b) Pren. IV. §. 1.

po R C è poi rappresentato dalla retta S s differenza delle due C s, C S: delle quali la prima è proporzionale al tempo R C, e l'altra alla velocità C S.

§. 200. Cor. V. Dunque *lo spazio descritto da un grave, che si lasci giù cadere in un fluido resistente come la velocità, è proporzionale alla differenza di due grandezze, una analoga al tempo, da che n' è disceso tal grave, ed un' altra analoga alla velocità acquistatasi da esso.*

§. 201. Scol. Un grave obbliquamente lanciato nella nostr' aria, ch' è un mezzo resistente, non vi descrive una Parabola conica, qual si conviene a' proietti ne' mezzi liberi (352 Mecc.); ma ne segna un' altra curva, la cui natura dalla legge della resistenza del fluido dipende. Il Cavalier Newton, il Leibnitz, l'Ugenio, e l'Ermanno esibirono eleganti costruzioni della *Proiettoria* (*a*), quando l' aria suppongasi resistere al mobile nella ragion della velocità di esso. Ma questa Ipotesi, ch' è *matematica*, e non *reale*, mi divieta d' occuparmi di vantaggio in tali ricerche: e sol vi dico, che questa curva è facile a determinarsi, e costruirsi per mezzo de' log-mi: e che il suo perimetro sebben si scosti sempre dalla verticale con-

(a) Per *Proiettoria* intendesi la curva de' gravi projettati per obblique direzioni in un mezzo resistente.

condotta per lo punto della proiezione; pure una tal distanza non può mai farsi di una certa finita magnitudine *(a)*.

PROP. XXIX. PROBL.

§. 202. *Definire il movimento di un globo, che con una forza istantanea finita si spinga in un mezzo similare, che resista a tal mobile come il quadrato della velocità di esso.*

Fig. 49. Costr. Intendasi spinto sì fatto globo per la direzione A G con una velocità espressa dalla D A perpendicolare ad A G: e la B C puranche perpendicolare ad A G in B dinoti quella velocità, che ne rimane al globo, dopo aver ei trascorso lo spazio A B in tal mezzo resistente. Pe' punti D, e C s'intenda descritta la Logistica D C H avente A G per assintoto (Vedi Pren. IV. Vol. II.): e prolungate in F, e Q le riferite perpendicolari, sicchè A F, e B Q sieno vicendevolmente

(a) In questa sola *Proiettoria* può scindersi il moto del proietto in due altri laterali di date direzioni: imperocchè la resistenza media, e le laterali, che son proporzionali alle velocità del proietto, possono esprimersi per la diagonale, e pe' lati del parallelogrammo delle forze (212. Mecc.). Lo che nelle altre ipotesi di resistenze non succede.

devolmente uguali a B C, ed A D, pe' punti F, e Q si concepisca descritta l'altra Logistica F Q V, che al mentovato assintoto ancor si rapporti. Io dico, *che le velocità del mobile ne' luoghi* B, K, G, &c. *sieno come le ordinate* B C, K E, G H, &c, *della prima Logistica: e che i tempi, ond' ei trascorre gli spazj* A B, A K, A G, &c. *serbino la ragion delle ascisse* F L, F R, F T, &c. *dell' altra* (intendendosi compiti i parallelogrammi A L Q B, A R V K, A T X G, &c.)

Dim. Suppongansi tra se uguali gli spazj A B, B K descritti dal mobile, ed essi dividansi in uguali particelle infinitesime, due delle quali sieno A a, B b. Sarà chiaro, che i decrementi di velocità, sofferti dal mobile in percorrendo i due spazietti A a, B b, esser debbano come le forze, che gli resistono in A, e B, e come i tempi, ond' ei li descrive (108 Mecc.). Ma per ipotesi le resistenze del mobile in A, e B sono come i quadrati delle velocità, di cui egli n'è affetto ne' medesimi luoghi: e 'l tempo per A a sta a quello per B b, *(a)* come la velocità in B alla velocità in A. Dunque i riferiti decrementi di velocità saranno direttamente come i quadrati delle velocità, ed inversamente come le medesime velocità, val quanto

(a) N. 2. §. 14. Mecc.

to dire come le semplici velocità del mobile. Dunque la scala di queste velocità è la Logistica D C H (*a*).

Prendansi i due qualunque spazj *AB*, *BK*, da cui s'intendano tolte le particelle *Aa*, *Bb*, infinitesime, e proporzionali ad essi: e pe' punti *a*, *b* si conducano le ordinate *df*, *cq* alle Logistiche; saranno le ordinate *af*, *bq* nella Logistica inferiore inversamente come le loro corrispondenti *ad*, *bc* nella superiore. Imperciocchè queste Logistiche hanno uguali sottangenti: e l'una non è che in sito inverso dell'altra. Dunque la ragione di *ad* a *bc* sarà quanto quella di *bq* ad *af*; val quanto dire le ordinate *af*, *bq* nella Logistica inferiore sono inversamente come le ordinate *ad*, *bc* loro corrispondenti nella superiore. E perchè i tempuscoli, ne' quali trascorronsi i due spazietti *Aa*, *Bb* colle velocità *ad*, *bc*, sono direttamente come gli stessi spazietti ed inversamente come le velocità *ad*, *bc*; essi saran pure come *Aa* a *Bb*, e come *af* a *bq*, cioè come il trapezietto *AafF* all'altro *BbqQ*. E quindi il tempo per *AB* sarà a quello (*b*) per *BK*, com'è l'aja logaritmica *ABQF* all'altra *BKUQ*. E finalmente il tempo per *AB* starà a quello per *AK* come l'aja logaritmica *ABQF* all' altra

(a) Pren. IV. §. 1.
(b) Pren. VI. Vol. I.

altra *AKUF*, cioè come *FL* ad *FR* (*a*). C. B. D.

§. 203. Cor. I. Le ascisse AB, BK, &c. son log-mi delle ragioni di AD : BC, di BC : KE, &c. (4. Pren. IV.) Dunque *in quest' ipotesi di resistenza ogni spazio corso dal mobile è log-mo della ragione della velocità, ond' esso spazio si è incominciato a percorrere, alla velocità, con cui vi si è terminato*.

§. 204. Cor. II. *E prendendo successivamente più spazj uguali; le velocità, con cui comincia il mobile a descriverli, saranno continuamente proporzionali*.

§. 205. Cor. III. Qualora nell' assintoto AG prendansi le parti uguali AB, BK, KG, &c; le corrispondenti ordinate AD, BC, KE, GH, &c della prima Logistica deggion essere in continua proporzione geometrica; e debbon essere anche continuamente proporzionali le altre AF, BQ, KU, GX, &c della seconda: e con ciò pure le loro differenze FL, FR, FT, &c. (Pren. IV. n. 1.).

§. 206. Cor. IV. Dunque, *se un globo si lanci con forza istantanea finita entro ad un mezzo resistente come il quadrato della sua velocità, i tempi, onde descrivonsi spazj uguali, saranno in progression geometrica crescente, e le velocità iniziali di questi spazj saranno in progres-*

(a) Pren. IV. §. 18.

gressione geometrica decrescente: e queste velocità saranno inversamente come que' tempi.

PROP. XXX. PROBL.

§. 207. *Determinare le leggi della discesa verticale di un globo ponderoso, che si lasci di per se cadere in un mezzo similare, resistente come il quadrato della velocità di esso globo.*

Fig. 50. Cost. Il quadrato ACOD rappresenti la gravità relativa del globo discendente in tal fluido. Col centro D, e col semiasse AD si descriva l'Iperbole equilatera AUT: e distesa la OC verso X si descriva l'altra Iperbole BNM, che si rapporti agli assintoti AC, CX, e che abbia la stessa potenza di AVT. Di poi si prenda in AC una qualunque retta AQ, ed AL terza proporzionale dopo AC, ed AQ: e finalmente, condotta per Q la segante centrale DQT nella prima Iperbole, si tiri per L l'ordinata LM nell'altra. Dico, *che se la velocità del grave discendente si esprima per AQ; lo spazio, alla fine del quale l'avrà il grave acquistata, debba dinotarsi per l'aja assintotica* ABML, *e 'l tempo pe 'l trilineo iperbolico* DAT.

Dim. N. I. Prendasi nell'assintoto AC un'altra retta AK, e si tronchino le due Al, Ak proporzionali ad AL, AK, e mancanti da queste per le particelle infinitesime Ll, Kk. Di poi si prendano sullo stesso assintoto le rette AQ, Aq, AP, Ap tali, che i loro quadrati pareggino i rettangoli CAL, CAl, CAK, CAk. E poichè $AQ^2 - Aq^2$ è uguale a CA.Ll, ed è anche $AQ^2 - Aq^2$ uguale ad 2AQq (*a*); sarà il rettangolo di CA in Ll uguale a 2AQq. E dimostrando in simil modo, che il rettangolo di CA in Kk puranche adegui 2APp, sarà CA.Ll : CA.Kk :: 2AQq : 2APp, cioè Ll : Kk :: AQq : APp. Ma, condotte pe' punti l, K, k le ordinate lm, KN, kn all'Iperbole BNM, la ragion de' rettangoletti LlmM, KknN è composta dalla ragione di Ll a Kk, e dall'altra di ML ad NK, o dalla sua uguale (*b*) di CK a CL. Dunque saranno i medesimi rettangoletti LlmM, KknN in ragion composta di AQq ad APp, e di CK a CL.

N. 2. Ciò premesso, i rettangoli CAL, CAl, CAK, CAk si suppongano proporzionali alle resistenze, che offre il fluido al mobile nella fine de' tempi T, T', t, t', qualunque sien questi. Sarà chiaro, che le velocità acquistatesi dal grave alla fine di que-

Z

(a) Per la 7. El. II. è $AQ^2 + Qq^2 = 2AQq + Aq^2$: e trascurando Qq^2 fassi $AQ^2 - Aq^2 = 2AQq$.

(b) Cor. 2. Prop. 20. Lib. III. Con. Gian.

questi tempi abbiansi a dinotare per le rette A Q, A q, A P, A p respettivamente: perciocchè di esse sono in duplicata ragione (n. 1.) i rettangoli C A L, C A l, C A K, C A k esprimenti le dilui resistenze alla fine de' tempi T, T', t, t'. E gli elementi delle velocità A Q, A P saran dinotati dalle Qq, Pp.

N. 3. Inoltre le forze, che accelerano il grave alla fine de' tempi T, T', t, t', dovranno essere come le differenze de' rettangoli C A L, C A l, C A K, C A k (ch'esprimono le di lui resistenze) dal quadrato di C A, ch' espone il peso relativo di esso: cioè come i rettangoli A C L, A C l, A C K, A C k (*a*), o come le loro basi C L, C l, C K, C k (*b*). Per ~~la qual~~ cosa essendosi dimostrato nel n.° 1. che stia LlmM : KknN : : (AQq : APp) (C K : C L); saranno le medesime aje L l m M, K k n N direttamente come le velocità, ed i loro elementi, ed inversamente come le forze acceleratrici. Dunque le stesse aje saranno (*c*) come gli elementi degli spazj descritti ne' tempi T—T', t—t': e le aje assintotiche A B M L, A B N K saranno come gli spazj descritti ne' tempi T, e t, o come gli spazj, che dee nel fluido

tra-

(a) Prop. 2. El. II.
(b) Prop. 1. El. VI.
(c) Vedi dim. Prop. 17. Mecc.

trascorrere il grave per acquistarsi le velocità A Q, A P.

N. 4. Essendo poi continuamente proporzionali le grandezze A C, A Q, A L; sarà A C : A L : : AC^2 : AQ^2. Ma pe' triangoli simili D A Q, D R T, ch'emergono ordinando TR all'asse AR dell' Iperbole A V T, sta DA^2, o AC^2 ad AQ^2, come DR^2 ad RT^2: dunque sarà pure AC : AL : : DR^2 : RT^2, e convertendo AC : CL : : DR^2 : DA^2 (*a*). E quindi gli altri triangoli simili D T r, D Q q, che sono, come i quadrati di D T, e di D Q, o come DR^2 a DA^2, saranno ancora come A C a C L. E collo stesso tessuto di ragioni si mostrerà, che il triangolo D P p stia a DVv, come C K a C A.

N. 5. E poichè la ragione del triangoletto DTt all' altro DVv è composta (*b*) da quelle di D T t a D Q q, di D Q q a D P p, e di D P p a D V v: e queste ragioni componenti sono respettivamente uguali alle ragioni di A C a C L, di Q q a P p (*c*), e di C K ad A C; sarà DTt : DVv : : (AC : CL) (Q q : P p) (C K : A C), cioè D T t : D V v : : (C K : C L) (Q q : P p). Val quanto dire gli elementi de' settori iperbolici D T A, D V A

Z 2 sono

(a) Cor. 2. Prop. 28. Lib. III. Con. Giann.
(b) Pren. I. Mecc.
(c) Prop. 1. El. VI.

sono nella ragion diretta degl' incrementi di velocità, e nell' inversa delle forze acceleratrici. Dunque saranno essi come i tempuscoli, ne' quali si generano gli elementi Q q, P p delle velocità: e gl' interi settori D T A, D V A saranno come i tempi, onde si generano le velocità A Q, A P: cioè come i tempi impiegati a descrivere gli spazj A B M L, A B N K (a). C. B. D.

§. 208. Cor. I. La *velocità massima* di questo grave, che col peso relativo scende nel mezzo resistente, sarà espressa dalla retta C A: com' è chiaro da per se stesso. E sarà $AC^2 : AQ^2 :: ADOC : CAL$: imperocchè le tre rette A C, A Q, A L sono continuamente proporzionali.

§. 209. Cor. II. Con che chiamandosi π il peso relativo di questo grave: v la velocità, ch' ei tiene in un qualche punto della sua discesa: R la resistenza, che quivi ne incontra: ed V la velocità massima di esso grave; sarà $V^2 : v^2 :: \pi : R$: e quindi $V = v\sqrt{(\pi : R)}$.

PROP.

(a) Fine n. 4.

PROP. XXXI. PROBL.

§. 210. *Poste le medesime cose del Prob. prec. definir le leggi del moto del medesimo globo, che con una forza finita si proietti in su verticalmente.*

Costr. Il quadrato di A C rappresenti il peso relativo del globo, che dentro ad un tal fluido ne sale proiettato in su verticalmente. E distesa la O C verso X, si descriva con una qualunque potenza l' Iperbole B N M, che si rapporti agli assintoti C A, C X. Col centro D intervallo D A si descriva il quadrante circolare A Φ O: e presa una qualunque A Q nell' assintoto C A, si trovi A I terza proporzionale dopo C A, ed AQ: e finalmente si ordini IG nell' Iperbole, e si congiunga DQ. Dico, *che ritrovandosi affetto della velocità A Q questo corpo salente, l' aja assintotica* A B G I *debba dinotar lo spazio, che gliene resta a descrivere, in sin che si estingua il suo moto: e poi il settore* DAΘ *dovrà esprimere il tempo, che ci vuole ad estinguersi la velocità di questo grave ascendente.* Fig. 50.

Dim. S' intenda premesso ciò, che vi ho recato nel n.° 1., e 2. Dimostr. precedente. E poichè i rettangoli C A I, C A i, C A H, CAh esprimono le resistenze, che offre il fluido al mobile nel principio de' tempi (a) T, T', t, t';

Z 3 e 'l

(a) T, T', t, t' sono i tempi richiesti per estinguersi tal moto.

e 'l di lui peso relativo è dal quadrato di AC rappresentato; saranno le forze, che nel principio de' medesimi tempi ne ritardano il mobile, come le respettive somme di ciascun di que' rettangoli, e del quadrato di AC, cioè come (*a*) i rettangoli ICA, iCA, HCA, hCA, o come (*b*) le loro basi IC, iC, HC, hC. Di più le velocità, che avrà il mobile nel principio de' tempi T, T', t, t', saranno rappresentate dalle rette AQ, Aq, AP, Ap (essendo quelle resistenze in duplicata ragion di queste). E gli elementi di velocità perduti dal grave ne' tempuscoli $T-T'$, $t-t'$ saranno come le retticciuole Qq, Pp (*c*). E poichè i due rettangoletti IigG, HhfF sono direttamente come i rettangoli AQq, APp, ed inversamente come CI, e CH (*d*), cioè direttamente come le velocità, ed i loro decrementi, ed inversamente come le forze ritardatrici; essi dovranno essere, come i decrementi degli spazj, che il grave salente dovrà percorrere ne' tempi T, e t (*e*). Dunque

(a) Prop. 3. El. II.
(b) Prop. 1. El. VI.
(c) Riflettete a ciò, che vi ho rapportato nella dim. del Probl. prec. n. 1, e 2.
(d) Come ho rilevato nella dim. del Probl. prec. n. 1.
(e) Il rettangolo, che si fa da ciascuno spazietto descritto dal grave, e dalla di lui forza acceleratrice, è proporzionale alla velocità di esso grave nel di lui elemento. Dunque (Pren. IV. Mecc.) tali spazietti saranno in ragion diretta delle velocità, e de' loro elementi, ed in ragion inversa di tali forze.

que le intere aje assintotiche ABGI, ABFH saranno proporzionali agli spazj, che si dovran salire dal grave, quand' è affetto delle velocità AQ, AP.

Or dalla supposizione il rettangolo CAI adegua AQ^2, ed è poi AC^2 uguale ad AD^2. Dunque sarà $CAI + AC^2$ uguale ad $AQ^2 + AD^2$, cioè il rettangolo ICA uguale a DQ^2. E quindi sarà $DQ^2 : D\Theta^2 :: ICA : CA^2 :: IC : CA$. Ma i due triangoletti simili DQn, $D\Theta\theta$ sono in duplicata ragione di DQ a $D\Theta$. Dunque sarà $DQq : D\Theta\theta :: IC : CA$.

Nello stesso modo dimostrasi, che stia $D\Phi\varphi : DPp :: CA : CH$. E poichè i due piccioli settori $D\Theta\theta$, $D\Phi\varphi$ sono fra loro in ragion composta di $D\Theta\theta$ a DQq, di DQq a DPp, e di DPp a $D\Phi\varphi$; prendendo le ragioni, che si son mostrate uguali a queste componenti, sarà $D\Theta\theta : D\Phi\varphi :: (CA:IC)\,(Qq:Pp)\,(CH:CA)$, cioè (*Pr.3.Mec.*) $D\Theta\theta : D\Phi\varphi :: (CH:CI)\,(Qq:Pp)$. Vale a dire i piccioli settori circolari $D\Theta\theta$, $D\Phi\varphi$ sono direttamente come i decrementi di velocità, che soffre ne' tempuscoli $T-T'$, e $t-t'$ il grave ascendente, ed inversamente come le di lui forze ritardatrici: e quindi come $T-T'$ a $t-t'$ (108. Mec.). E sarà $T : t :: AD\Theta : AD\Phi$. C. B. D.

CAP. IX.

SOLUZIONI ANALITICHE DI ALCUNI PRINCIPALI PROBLEMI SUL MOTO DE' GRAVI NELL' ARIA.

PROP. XXXII. PROBL.

§. 211. *Risolvere analiticamente il Problema XXX. riguardo alla nostr' aria: ed estenderne la soluzione ad altre Ipotesi di Resistenze.*

SOLUZ. Sia r il semidiametro del globo discendente nell' aria pel proprio peso: 1 a π la ragione del diametro alla periferia: D la gravità specifica del globo: e Δ quella dell' aria; sarà $\pi r r$ un cerchio massimo dello stesso globo: $\frac{4}{3}\pi r^3 D$ il di lui peso: e $\frac{4}{3}\pi r^3 \Delta$ quello dell' aria d'altrettanto volume. Inoltre sia v la celerità acquistatasi dal globo alla fine del tempo t; sarà $3vv:181$ l'altezza dovuta alla celerità v (not.b.114.); la quale altezza può comodamente porsi uguale ad $vv:60$, e sarà $\pi r r.\Delta.\frac{vv}{60}$ la resistenza diretta, ch' esso cerchio massimo ne incontrerebbe nell' aria, se visi movesse colla velocità v (170. n.1.). E quindi la resistenza di esso globo, ch' è

ch'è metà della resistenza del divisato cerchio, sarà $\pi r r.\Delta.\frac{vv}{120}$. E poichè il peso del globo è $\frac{4}{3}\pi r^3 D$, e la sua forza elevatrice recatagli dal fluido (34) è $\frac{4}{3}\pi r^3 \Delta$; sarà $(D-\Delta)\frac{4\pi r^3}{3}$ il peso relativo dello stesso globo. E quindi la forza motrice, onde alla fine del tempo t n'è animato il globo cadente nell' aria, sarà $\frac{4\pi r^3}{3}(D-\Delta)-\frac{\pi r r}{2.60}\Delta vv$: come quella, ch'è l'eccesso del peso relativo del globo sulla resistenza cagionatagli dal fluido. E dividendo questa forza motrice per la massa del globo, ch'è $\frac{4\pi r^3}{3}D$, avrassi la di lui forza acceleratrice (a): che ne risulta uguale a $\frac{\theta(D-\Delta)}{D}-\frac{\theta\Delta vv}{8.20 r.D}$. Laonde facendo per brevità del calcolo $\theta(D-\Delta):D=\delta$, e $\frac{\theta\Delta}{160.D}=\varphi$; sarà la forza, che accelera il globo alla fine del tempo t, uguale a $\delta-\varphi vv$. Ma tal forza acceleratrice moltiplicata per lo spazietto ds è uguale alla velocità v del globo moltiplicata pel di lei elemento dv, generatovi nel tempuscolo dt (Dim. Pr.17.Mec.). Dunque sarà

$(\delta -$

(a) Vedi §. 91. della Mecc., la nota (c) §. 124, e not. (a) n. 6. §. 328.

$(\delta - \varphi v v) ds = v d v$ M, e quindi

$$ds = \frac{v\,d\,v}{\delta - \varphi v v}, \text{ ed } s = -\frac{1}{2\varphi} \log.(\delta - \varphi v v) + C$$

E determinando la costante C dal supporre, che v diventi zero, quando ne svanisce l'altra indeterminata s; sarà

$$s = \frac{1}{2\varphi} \log.\left(\frac{\delta}{\delta - \varphi v v}\right) \qquad A$$

Or (12.Mec.) la grandezza v d t è uguale a d s: e si è qui sopra ritrovato esser d $s = v\,d\,v : (\delta - \varphi v v)$. Dunque sarà $v dt = v dv : (\delta - \varphi v v)$: cioè $d t = d v : (\delta - \varphi v v)$. Ed integrando sarà

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\delta\varphi}} \log. \frac{\sqrt{\delta} + v\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\delta} - v\sqrt{\varphi}} \qquad B$$

Intanto l'Equazioni A, e B, che son logaritmiche, possono facilmente trasformarsi in esponenziali, o da' log-mi può passarsi a numeri agevolmente. E quindi può determinarsi la velocità v per una funzione dello spazio s mediante l'equazione A: e può benanche la stessa velocità esprimersi per una funzione del tempo t mercè l'equazione B. Con che pareggiando i due valori della velocità v, che separatamente ritraggonsi dall' Equazioni A, e B, avrassi un' Equazione indeterminata tra lo spazio s, e 'l tempo t. Così supponendo esser e quel numero, il di cui log-mo iperbolico è 1, e facendo per brevità del Calcolo $m = \sqrt{(\delta : \varphi)}$, avrassi dall'equazione A quest'altra

$$e^{2\varphi s} = \frac{m\,m}{m\,m - v\,v}, \qquad D$$

la quale convenevolmente maneggiata darà

$$\frac{v}{m} = \sqrt{\left(\frac{e^{2\varphi s} - 1}{e^{2\varphi s}}\right)} \qquad E$$

Similmente, moltiplicando per φ l'equazione B, e ponendovi m per $\sqrt{(\delta : \varphi)}$ nel secondo membro di essa, sarà

$$\varphi t = \frac{1}{2m} \text{l.}\left(\frac{m + v}{m - v}\right)$$

e quindi $e^{2\varphi t m} = \dfrac{m + v}{m - v}$

ove praticando quelle operazioni, che richieggonsi per determinare la grandezza v, sarà

$$\frac{v}{m} = \frac{e^{2\varphi t m} - 1}{e^{2\varphi t m} + 1} \qquad F$$

E pareggiando i secondi membri dell'equaziozioni E, ed F, poichè i primi son tra se identici; avrassi l' Equazione

$$\sqrt{\left(\frac{e^{2\phi s}-1}{e^{2\phi s}}\right)}=\frac{e^{2\phi tm}-1}{e^{2\phi tm}+1},$$

che trattata convenevolmente darà

$$e^{2\phi tm}=2e^{2\phi s}-1+2e^{\phi s}\sqrt{\left(e^{2\phi s}-1\right)}$$

E passando da' numeri a logaritmi, sarà

$$2\phi tm=\log.\left(2e^{2\phi s}-1+2e^{\phi s}\sqrt{\left(e^{2\phi s}-1\right)}\right)$$

$$\text{e } t=\frac{1}{2\sqrt{\delta\phi}}\,l.\left(2e^{2\phi s}-1+2e^{\phi s}\sqrt{\left(e^{2\phi s}-1\right)}\right)G.$$

§. 212. Scol. I. Quest' Equazione, ch' è più comoda delle precedenti, contiene il rapporto degli spazj a' tempi: onde in pratica può facilmente *definirsi dal tempo, in che nell' aria si è lasciato cadere un grave, lo spazio, ch' ei vi ha descritto: e vice versa*. Altre formole più semplici della G avrei potuto rapportarvi: ma ho trascelto questa, come più sicura delle altre.

§. 213. Scol. II. Molte verità potrebbonsi raccorre dallo sviluppo delle formole M, A, B, D, F, G, e dalle particolari determinazioni delle grandezze loro; non di meno per non gravarvi di tropp' analisi, ve ne indico solamente alcune principali.

1. Se nella formola D suppongasi $v=m=\sqrt{(\delta:\phi)}$; sarà $\frac{mm}{0}=\infty$. Dunque sarà $e^{2\phi s}=\infty$: e con ciò $s=\infty$. Vale a dire *la velocità di un grave discendente nell' aria non può mai divenire uguale* a $\sqrt{(\delta:\phi)}$.

2.° Se nella formola M pongasi $-\delta$ in luogo di $+\delta$, avrassi un' Equazione, da cui si possono definire i *sintomi* del moto di un grave, che verticalmente si proietti all' insù con una velocità *c*. Ma quì la costante C vuol determinarsi dal supporre, che sia $v=c$, quando *s* è zero. E poi il rapporto de' tempi alle celerità di questo grave ascendente non dipende da' log-mi, ma dagli archi di cerchio.

§. 214. *Raccorre dalla precedente soluzione una formola generale per ogni Ipotesi di resistenza.*

Soluz. Sia P il peso di uno globo, che dal luogo A si lasci verticalmente calar nell' aria, e p il peso dell' aria di un pari volume. Dicasi *s* lo spazio AQ, ch' egli vi abbia descritto in un qualunque tempo t, e la sua velocità nel luogo Q sia dovuta all' altezza U. Inoltre sia f l' esponente della resistenza dell' aria (176): ed essa resistenza sup- *Fig. 52. n. 2.*

supponghasi proporzionale ad U^m; sarà f^m ad U^m, come P al quarto proporzionale $PU^m : f^m$, che dovrà dinotare la forza, onde l' aria resiste al globo nel luogo Q. Ma il peso relativo di tal corpo è P—p: dunque la di lui forza motrice sarà $P - p - U^m P : f^m$, e l' acceleratrice (91. Mecc.) sarà poi

$$\frac{P-p}{P} - \frac{U^m}{f^m} = \pi - \frac{U^m}{f^m},$$

ponendo π uguale a $(P - p) : P$.

E quindi, dovendo essere (a)

$$dU = \left(\pi - \frac{U^m}{f^m}\right) ds,$$

sarà

$$s = \int \frac{f^m dU}{\pi f^m - U^m} \qquad S$$

Ed essendo $t = ds : \sqrt{U}$, sarà

$$t = \int \frac{f^m dU}{\pi f^m \sqrt{U} - U^m \sqrt{U}} \qquad T$$

PROP.

(a) Not. (c) Prop. 17. Mecc.

PROP. XXXIII. PROBL.

§. 215. *Ritrovare la legge della Resistenza, e della Densità della nostr' Aria, affinchè un proietto vi potesse descrivere una curva data.*

Soluz. La retta orizzontale PQ rappresenti l' asse dell' Orbita PFQ, e le sue particelle BC, CD, DE sieno infinitesime, ed uguali fra loro. Dagli estremi di queste retticciuole si tirino ad essa curva le ordinate rettangole BG, CH, DI, EK, e da' termini delle due prime conducansi le tangenti GL, HN all'Orbita PFQ, le quali in L, ed N incontrino le ordinate CH, DI. L' archetto GH, che può aversi come una retticciuola posta per dritto alla NH, sarà uguale alla stessa NH, com' è per supposizione la BC uguale alla CD.

Si compia il parallelogrammo HNIn: e la forza, che ha il proietto in descrivendo l' archetto HI, si risolva nelle due laterali Hn, HN, di cui la prima dee dinotar la gravità di esso mobile (a); e l'altra HN sarà la forza tangenziale dello stesso proietto,

(a) Essendo picciolissima la velocità per NI, la resistenza, che avrebbe il grave cadendo per NI, sarà zero.

to, affievolita dalla resistenza del fluido: E poichè questo mobile colla forza tangenziale acquistatasi per G H potrebbe in un mezzo libero descrivere la H N (282. Mecc.) in quanto tempo ha percorsa la G H; sarà chiaro, ch' ei con questa forza tangenziale diminuita dalla resistenza del fluido debba descriver la H N in più di tempo, che la di lei uguale G H. Dunque indicando colla lettera t il tempo, nel quale il proietto descrive l' arco G H della sua Trajettoria, e con T quell' altro tempo, in ch' ei potrebbe descriver la H N colla forza tangenziale diminuita per la resistenza del mezzo; saranno le velocità, onde descrivonsi cotesti spazietti G H, H N, come le grandezze GH:t, ed HN:T (15. Mec.). E quindi la differenza di tali velocità, o il decremento, che recasi dal fluido alla prima di esse, sarà espresso dalla differenza di quelle due grandezze, cioè da $GH(T-t):Tt$. Ma la gravità del proietto, come quella, che sola farebbe discenderlo per l' altezza verticale H n nel tempo T, vi genera la velocità $2NI:T$ (*a*). Dunque sarà la resistenza del fluido alla gravità del proietto, come $GH(T-t):Tt$ a $2NI:T$, cioè come

me

(a) N. 3. §. 153. Mecc.

me $GH.\frac{T}{t}-GH$ a $2NI$. Ed essendo $T:t::\sqrt{NI}:\sqrt{LH}$ (*a*); sarà la resistenza del fluido alla gravità del proietto, come

$$GH\sqrt{\frac{NI}{LH}}-GH \text{ a } 2NI.$$

Premesse tali cose, si chiami P l' ordinata C H, e sia $CD=\omega$; sarà $CE=2\omega$, e $CB=-\omega$. Inoltre la M I differenza delle due ordinate C H, D I esprimasi per mezzo della serie $Q\omega+R\omega\omega+S\omega^3$, &c, nella quale il n.° de' termini sia indefinito, ed i coefficienti loro sieno grandezze costanti da determinarsi ne' casi particolari.

Saranno $DI=P-Q\omega-R\omega\omega-S\omega^3-$&c

$EK=P-2Q\omega-4R\omega\omega-8S\omega^3-$&c.

$BG=P+Q\omega-R\omega\omega+S\omega^3-$&c

e $Gg=GB-CH=Q\omega-R\omega\omega+S\omega^3-$&c

Ma è poi $GH^2=\sqrt{(Hg^2+Gg^2)}$: dunque, sostituendone i valori di queste grandezze, sarà

$$GH=\sqrt{(\omega\omega+QQ\omega\omega-2QR\omega^3+\&c)}.$$

E, lasciando in questo radicale i due primi termini solamente (imperciocchè gli altri sono disprezzabili rispetto ad essi), sarà

A a GH

(a) N. 1. §. 153. Mecc.

$$GH = \omega\sqrt{(1+QQ)}$$

Or se dall' ordinata CH tolgasi la semisomma dell' estreme BG, DI, ottiensi la nH saetta dell' arco GHI: imperocchè essendo BG, Cn, DI equidifferenti, la media Cn sarà $\frac{1}{2}(BG+DI)$: e quindi Hn, ch' è uguale a CH—Cn, sarà uguale a $CH-\frac{1}{2}(BG+DI)$. E sarà pure la saetta dell' arco HK uguale a $DI-\frac{1}{2}(CH+EK)$. Ma le retticciuole LH, NI son proporzionali alle saette di questi archi minimi GI, HK. Dunque saranno le LH, ed NI, come $CH-\frac{1}{2}(BG+DI)$, e $DI-\frac{1}{2}(CH+EK)$, cioè come R ad $R+3S\omega$: e quindi sarà

$$\sqrt{\frac{NI}{LH}} = \sqrt{\left(\frac{R+3S\omega}{R}\right)} = \sqrt{\left(1+\frac{3S\omega}{R}\right)},$$ cioè

$$\sqrt{\frac{NI}{LH}} = 1 + \frac{3S\omega}{2R} \quad (a)$$

Per la qual cosa essendosi dimostrato esser la resistenza del mezzo alla gravità del proietto, come $GH\sqrt{(NI:LH)} - GH$ a 2NI; sarà quella a questa, come

$$\left(1+\frac{3S\omega}{2R}\right)\omega\sqrt{(1+QQ)} - \omega\sqrt{(1+QQ)}$$

a $2R\omega\omega$, cioè nella ragione di

$$3S\sqrt{(1+QQ)} \text{ a } 4RR:$$

come, fatte le convenevoli riduzioni, ben si

(a) Pren. 5. Vol. II.

si rileva. E ponendo uguale ad 1 la gravità del proietto, sarà la di lui resistenza in H uguale a $\frac{3S}{4RR}\sqrt{(1+QQ)}$. Ma la velocità, che ha lo stesso proietto nel luogo H, è tale, ch'ei ne potrebbe descrivere equabilmente la HN, o la sua uguale GH, in quel tempo, ch'egli v'impiegherebbe a calare liberamente per l'altezza verticale NI (a). Dunque siffatta velocità dovrà essere direttamente come GH, ed inversamente come il tempo della discesa per NI (15. Mecc.): e 'l suo quadrato sarà direttamente come il quadrato di GH, ed inversamente come il quadrato del tempo della discesa per NI, o come l'altezza NI (b): cioè il quadrato della velocità, che ha il proietto in H, sarà come $\omega\omega(1+QQ) : R\omega\omega$, o come $(1+QQ):R$. Ed essendo la resistenza del mezzo come la di lui densità, e 'l quadrato della celerità del mobile (183); sarà la densità del mezzo direttamente come la di lui resistenza, ed inversamente come il quadrato della velocità di tal proietto, cioè come $\frac{S}{R\sqrt{(1+QQ)}}$. A

Che se dall' Equazione della curva propo-

(a) Il proietto, che sta percorrendo l'arco HN, n'è determinato dalla sua forza tangenziale a muoversi equabilmente per HN in tanto tempo, in quanto colla propria gravità scenderebbe per NS.

(b) §. 153. n. 1. Mecc.

sta raccolgansi i valori delle grandezze Q,R, ed S, che sono i coefficienti del 2°, 3°, e 4° termine dell'ordinata DI, ed essi surroghinsi nella formola A; avrassi la densità del mezzo, che si ricerca.

§. 216. Esemp. La curva PGQ sia una Parabola Apolloniana, il di cui parametro principale sia b: e pongasi PC$=$a, PQ$=$c, e CD$=\omega$; sarà PD.DQ$=$ac$-$aa$+($c$-$2a$)\omega-\omega\omega$. Ma il rettangolo di PD in DQ è uguale all'altro di b in DI (*a*): dunque sarà

$$DI = \frac{ac-aa}{b} + \frac{c-2a}{b}\,\omega - \frac{\omega\omega}{b}$$

E quindi sarà Q$=$(2a$-$c) : b, R$=$1 : b, ed S$=$o: e finalmente sarà S : R$\sqrt{(1+QQ)}=$o. Vale a dire *nell'Ipotesi della gravità costante non puol essere una Parabola conica la Proiettoria di un grave, se la resistenza del mezzo non sia zero*.

§. 217. Scol. Nella Soluzione di questo Problema, come l'avrete percepito, traluceno degl'ingegnosissimi principj d'invenzione; pur non di meno da' Geometri si è desiderato, che la loro esposizione fosse più chiara: più semplice il calcolo, che vi si trae: e più sicura l'applicazione di esso a' casi parti-

(a) Cor. I. Prop. II. Lib. I. Con. Giann.

ticolari (*a*). E vorrebbesi finalmente, che da medesimi principj potesse investigarsi la Proiettoria di un grave, che velocemente, e per direzioni oblique fende un mezzo resistente come il quadrato della velocità di esso. Con che avendovi quì chiarito cotesti Principj, è di bene, che da essi ne tragga l'equazione alla divisata Proiettoria (*b*).

PROP. XXXIV. PROBL.

§. 218. *Data la velocità, e la direzione, onde un grave proiettasi per PR in un mezzo resistente come il quadrato della velocità di esso, e posta la gravità costante; vuol rinvenirsi l'equazione della Proiettoria di tal grave* (*c*). *Fig. 53.*

Soluz. La curva PGQ sia la *Proiettoria* di questo grave, per esempio di una palla

(a) Nella I Edizione de' Principj Matematici del Newton vi è un neo nell'applicazione, ch'ei ne fa al cerchio: come fu osservato da Giovanni Bernulli, e dal di lui nipote Nicola Bernulli.

(b) §. 108. Mecc.

(c) La soluzione di questo Problema è difficilissima ad ottenersi non pur colla Sintesi, che co' Metodi Analitici de' Moderni. Basta dirvi, ch'ella si sottrasse all'acume del Gran Newton: onde questo Geometra si occupò ad isnodare de' Problemi affini: uno de' quali è quello, *di ritrovar la legge della densità di un mezzo, ove convene-*

vol-

da Cannone lanciata nella nostr' aria dal punto P per la direzione PR. Dal luogo P conducasi l' orizzontale PQ: e praticata la stessa costruzione del Prob. prec., facciasi $PB = x$, $BG = y$, $PFG = s$, e 'l tempo per $PFG = t$. Saranno $BC = CD = dx$, $GH = HN = ds$, $LH = ddy$: e 'l tempo, onde colla velocità in H descrivesi l'archetto GH, uguale a dt. Ed essendo il tempo, che v' impiega il proietto a descrivere la HN, maggiore del tempo per GH, a cagion della resistenza del mezzo; potrà il tempo per HN porsi uguale a $dt' = dt + ddt$. E quindi le velocità, che avrà lo stesso mobile in percorrendo gli spazietti GH, HN, saranno respettivamente uguali a $ds : dt$, $ds : dt'$. E la loro differenza, o il decremento della velocità, che quivi ne soffre il proietto dal mezzo resistente, sarà uguale a $(dt'ds - dtds) : dtdt'$, cioè a $dsddt : dt^2$ (intendendosi sostituito il valore di dt', e fatte le dovute contrazioni). Or la resistenza del mezzo supponesi proporzionale al quadrato della velocità del mobile, la quale in H è uguale a $ds:dt$. Dunque, se f dinoti (173) l' esponente di tal resistenza, sarà $fds^2 : dt^2$ il valore della resistenza, che l' aria ne oppone al proietto, ch' è in H. Ma il decremento della velocità è come tal resistenza, e come il tempuscolo, in che quello vi si cagiona. Dunque sarà

$$\frac{dsddt}{dt^2} = \frac{fdtds^2}{dt^2}, \text{ cioè } \frac{ddt}{dt} = f\,ds \qquad R$$

E poichè lo spazietto LH è come la gravità del proietto (la quale si esprima per g) e come il quadrato del tempo (*a*); sarà $ddy = gdt^2$; e differenziando $d^3y = 2gdtddt$. E quindi, dividendo il primo membro di questa equazione per lo primo di quella, e 'l secondo per lo secondo, avrassi

$$\frac{d^3y}{ddy} = \frac{2ddt}{dt}$$

Ma nell' equazione R si è ritrovato $ddt : dt = fds$. Dunque sarà

$$\frac{d^3y}{ddy} = 2fds, \text{ e } d^3y = 2fdsddy. \; (b)$$

volmente spignendosi un grave ne descrivesse una curva data (216): e quell'altro *di rinvenir la legge della forza centripeta, che combinandosi con una data legge della densità del mezzo ne facesse gire un corpo in una certa spirale*. Ma intanto il Problema della Proiettoria è stato primieramente risoluto da Giovanni Bernulli, e poi dal Taylor, dall' Eulero, dal Cavalier de Borda, dal Lambert, dal Bezout, dal Signor L. W. Krafft, e da altri.

(a) §. 109. Mecc.

(b) Questa formola è analoga a quelle, che con di-

CAP. X.

Delle principali macchine Idrauliche.

§. 219. L'Acqua stagnante, ch'è in un vase, non ha forza da estollersi dal proprio livello: nè quella, ch'è in due tubi comunicanti, può mai sospignersi in uno, e restar giù nell'altro. Dunque se mai avrete osservato, che l'acqua di un pozzo, di un lago, o di una Conserva siasi per acquidotti in un'eminente serbatojo derivata, dovete immaginarvi, che straniera forza premendo l'acqua, o agitan-
dola

diversi metodi rilevaronsi da Gio: Bernulli, dall'Eulero, dal Cavalier de Borda, dal Lambert, da L. W. Krafft, e da altri Geometri, i quali dalla di lei integrazione han saputo costruirne le Tavole Ballistiche. Imperocchè, quando la velocità iniziale di un proietto sorpassa 30. piedi in un secondo (lo che accade nelle palle da Cannone, e nelle bombe), la proiettoria è differentissima dalla Parabola Apolloniana: e ci voglion altri metodi per risolvere tali Problemi Ballistici. In fatti il Signor Saurireri conobbe per esperienza, che un Cannone di 24. caricato di 16 lib. di polvere, e puntato all'angolo di 45°, gittava la palla a 2250 tese, che nel voto sarebbe ita alla distanza di 22922 tese; per esser la sua portata di 2038 in un secondo. E 'l Cavalier de' Borda ne ha costruite delle Tavole, ove osservansi i divarj ne' tiri fatti nell'aria, e nel voto. *Att. Acc. dell. Scien.* 1765.

dola ne abbia determinata una di lei parte a gire in alto.

§. 220. Defin. XVII. Ogn' Istromento, con cui premendo l'acqua stagnante o agitandola, si obbliga una di lei parte a sublimarsi dal proprio livello per iscaricarsi in un'eminente serbatojo, dicesi *Macchina Idraulica*.

§. 221. Cor. I. A questa definizione non appartengonsi gli *Altaleni*, nè le *semplici Secchie*, nè le *Secchie a rosario*, o *a ruota*, che *Bindoli* dagl' Italiani soglion chiamarsi.

§. 222. Cor. II. La forza, che sospigne l'acqua nelle Macchine Idrauliche, o vi agisce per *pressione*, o per *urto* (45.Mec.). Dunque è ragionevole il classificarle in *Macchine agenti per pressione*, ed *in Macchine agenti per urto*: e denominarne le diverse specie di quelle, e di queste da' nomi delle potenze prementi, e delle impellenti, che impieganși a tal uopo.

§. 223. Scol. I. Per chiarirvi ciò, che astrattamente vi ho quì recato riguardo alle prime Macchine, immaginatevi essere ABCE un pozzo, la cui bocca A B abbia un coverchio di legno sì ben combaciante colle sue pareti, che deprimendosi esso coverchio con moto a se parallelo a guisa di stantuffo, nè l'acqua, nè l'aria possa trapelarne. Di più concepite, che pongasi sul coverchio AB un gran peso, come P, o che quivi ne prema *Fig.56.*
una

una gagliarda molla , o che ne agisca l'aria condensata , o i vapori ristretti nello spazio A L B : e che in C si apra un foro , o vi si applichi un condotto ; non dovrà l'acqua zampillarne pe 'l foro C , o elevarsi in tal condotto? E quindi infinite Macchine Idrauliche potrebbonsi escogitare per le diverse potenze prementi , che vi s' impiegano , e pe 'l diverso modo d'agirvi . La qual cosa potrà benanche intendersi per le altre Macchine Idrauliche agenti per urto .

§. 224. SCOL. II. In questo Capitolo io mi restringo a ragionarvi delle *Trombe Idrauliche* , e della *Chiocciola d' Archimede* : le prime delle quali appartengonsi alle Macchine Idrauliche prementi : e l' altra è una Macchina Idraulica agente per urto : al quale genere anche appartiensi la *Pompa a corda* di Monsiù Verà .

Delle Trombe Idrauliche.

§. 225. DEFIN. XVIII. Un sistema di tubi verticali , entro a cui sospignesi una parte di un' acqua stagnante per la pressione dell' aria esterna , o di qualche loro stantuffo che vi si dimena , o per la pressione di quella e di questo , dicesi *Tromba Idraulica* , *Macchina Tesibiana* (a) , o *Pompa Elevatoria*.

§. 226.

(a) Ctesibio Alessandrino Maestro del celebre Ero-

§. 226. COR. Dal triplice modo , onde premesi l' acqua salente nelle Trombe Idrauliche , si soglion queste dividere in *Trombe Aspiranti* , in *Prementi* , ed in *Aspiranto-prementi* , che diconsi *Composte* .

§. 227. DEFIN. XIX. La Tromba aspirante è formata dal tubo verticale H N immobile , e saldo nelle sue pareti , entro al quale giuoca lo stantuffo m n G guernito della valvola v a cerniera , che apresi all' insù . In mezzo al suo fondo evvi saldato il tubolino verticale c f , il dicui forame inferiore C D mergesi nell' acqua stagnante , e 'l superiore, che comunica col tubo HN , n' è chiuso dalla valvola O , che apresi di sotto in sopra . Fig. 57.

§. 228. DEFIN. XX. Il primo di questi tubi , cioè il tubo H N , dicesi *Corpo della Tromba* : il sottoposto tubo C f , che pesca nell' acqua , si chiama *Tubo d' Aspirazione* . E lo spazio K H I L dicesi *Parte inferiore della Tromba* .

§. 229. DEFIN. XXI. *La Tromba Premente*

non

Erone visse nel II. secolo prima dell' Era Cristiana . Egli osservando per caso un sibilo , che faceva l' aria al muoversi di un peso in uno spazio stretto , fu dal suo genio trasportato ad inventare alcune Macchine Idrauliche ; tra le quali distinguonsi queste *Pompe elevatorie* , che sono state recentemente perfezionate dal Cavalier Morland Francese , e dagl' Inglesi Watts , e Boulton .

non è che la Tromba Aspirante capovolta. Cioè il corpo della Tromba col suo stantuffo è nell'acqua: il tubolino, che dicesi *Tubo Ascendente*, l'è al di sopra: e le valvole, che vi si contengono, apronsi di sotto in sopra.

§. 230. Defin. XXII. Se al Corpo della Tromba, il di cui stantuffo non abbia la sua valvola, siane saldato il tubo comunicante VPQ, ben lungo, ed avente la sua valvola V, che aprasi dentro ad esso; questa Macchina dirassi *Tromba Composta*: e 'l tubo VPQ *Acquidotto*, *Condotto*, o *Cannone di Condotto*.

§. 231. Scol. I. *Le Trombe Aspiranti* sogliono adoperarsi per cavar le acque da' Pozzi, o da altri luoghi alquanto profondi, per condurle ad una picciola altezza sulla Terra. Colle *Prementi* sospingonsi le acque da' luoghi poco profondi ad altezze molto eminenti, come da una Fontana ad una Torre. E le *Composte* servono a cavar le acque da' luoghi assai profondi, ed a menarle per condotti in altissimi serbatoj.

§. 232. Scol. II. Ma prima, che passi altrove non vo' tacervi un principio euristico per gli effetti delle prime Macchine, ch' è il seguente. *Se la forza* F, *qualunque ella si sia, premendo un piano* p *ne obblighi un' acqua stagnante a zampillare, o ad estollersi in un condotto: e sia F di tante libbre, quante contengonsi nel volume V di quest' acqua; sarà l' altezza, alla quale n' è determinata l' acqua a salire, uguale ad* (V : p). Vedi §. 27.

PROP. XXXV. PROBL.

§. 233. *Date le dimensioni della Tromba Aspirante* MHeCDfiN *esporre il modo, e la quantità dell' acqua, che in ciascuna delle prime agitazioni dell' embolo elevasi nel Tubo d'Aspirazione.* Fig. 57.

Sol. I. Sia KN quella parte del corpo della Tromba, ove ne trascorre lo stantuffo colle vicendevoli sue elevazioni, e depressioni: ed HL la di lei parte inferiore. Sarà chiaro, ch' elevandosi lo stantuffo dal sito KL in MN, l'aria rinchiusa in HL debba spandersi in HN, e rendersi men densa, ed elastica di quell' altra, ch' è nel tubo d'aspirazione eCDf. Dunque l' aria di questo tubo per la sua elasticità prevalente dovrà aprirne la valvola O, e diffondersi in HN: e mescendosi coll' aria dello spazio HN, dovrà formarne un' altr' aria più densa di quella, ch' era in HN, ma men densa, ed elastica dell' aria esterna. E quindi l' acqua stagnante, ov' è immerso il tubo d' aspirazione, dovrà sospignersi entro di esso fino all' altezza CE tale, che la pression dell' acqua contenuta in CF, e l' elasticità dell' aria com-

compresa in E e H M N I f F si equilibrino coll' elasticità dell' aria esterna.

II. Che se lo stantuffo da M N si deprima in K L, dovrà chiudersi la valvola O, ed aprirsi l' altra v, per la quale sarà espulsa quell' aria, che contenevasi nello spazio M K L N. E di bel nuovo elevandosi l' embolo in M N renderassi vie più rara l' aria, che trovasi in questa Tromba, e più elevata l' acqua nel tubo d' aspirazione: come dall' antecedente discorso potrete intenderlo chiaramente.

III. Nella prima agitazione dell' embolo l' aria ristretta nel Volume C f + H L dilatasi nell' altro E f + H N. Nella seconda agitazione dell' istesso embolo l' aria rinchiusa nel volume E f + H L si spande nel volume E'f + H N. Nella terza &c. Intanto per brevità d' espressione distinguerò con diversi nomi que' due volumi, che in ogni agitazion dell' embolo sono occupati da una stessa massa d' aria: chiamando il primo *Volume ristretto*, e l' altro *Volume espanso*. Ed esprimendo per v, ed V cotesti volumi, e per p, e P le forze, che vi ritengon l' aria in quel volume, ed in questo, sarà $pv = PV$ (64).

Premesse queste dilucidazioni sul modo, e la ragione, onde nelle Trombe aspiranti si eleva l' acqua, eccone il calcolo della quantità dell' acqua aspirata.

IV.

IV. Le basi HI, e CD del corpo della Tromba, e del tubo d' aspirazione dicansi respettivamente B, e b: e sieno $HM = A$, $HK = \alpha$, $Ce = a$. Inoltre le C E, C E', C E'', &c, che son le respettive altezze, ove nel tubo d' aspirazione trovasi l' acqua dopo la prima agitazione dell' embolo, dopo la seconda, dopo la terza, &c, dicansi x, x', x'', &c.. Saranno le rette e E, e E', e E'', &c. uguali ad $a - x$, $a - x'$, $a - x''$, &c respettivamente: e le ampiezze de' cilindri HN, HL, Cf, Ef, E'f, E''f, &c. saranno respettivamente uguali ad AB, αB, ab, $ab - bx$, $ab - bx'$, $ab - bx''$, &c. Di più sarà $HN + Ef = AB + ab - bx$ $HN + E'f = AB + ab - bx'$, $HN + E''f = AB + ab - bx''$, &c. E sarà puranche $HL + Ef = \alpha B + ab - bx$, ed $HL + E'f = \alpha B + ab - bx'$ &c.

V. Finalmente pongasi uguale ad 1 la densità dell' acqua, che all' altezza p equilibrasi coll' aria naturale, cioè con quell' aria, che nella prima agitazione dell' embolo n' è ristretta entro a' tubi H L, C f; sarà bp il peso di questa colonna d' acqua. Ed espandendosi quest' aria nel volume $HN + Ef$, quando lo stantuffo si è sollevato in M N; sarà bx il peso dell' acqua salita nel tubo C F, e quindi $bp - bx$ il peso dell' acqua, che tien l' aria dilatata in questo volume $HN + Ef$. Similmente nella seconda agitazione dell' embolo l' aria ristretta nel volume $HL + Ef$,

n' è

n'è ritenuta dal peso $bp - bx$. E nello stato d'espansione, cioè quando ne occupa lo spazio $HN + E'f$, vi si ritiene dal peso $bp - bx'$. E così in appresso. Dunque in virtù di quel, che si è detto nel n.° III. della soluzione di questo Problema, si avranno le seguenti equazioni quadratiche,

$$\text{I.}\ (bp - bx)(AB + ab - bx) = bp(\alpha B + ab)$$

$$\text{II.}\ (bp - bx')(AB + ab - bx') = (bp - bx)(\alpha B + ab - bx)$$

$$\text{III.}\ (bp - bx'')(AB + ab - bx'') = (bp - bx')(\alpha B + ab - bx'),$$

&c.

le quali dovran maneggiarsi nel seguente modo: cioè il valore dell'x determinato dalla I. equazione si surroghi nella II. per determinarvi x': e 'l valor del x' di questa equazione si sostituisca nella III. per averne il valore di x'', &c.

VI. Ma per agevolar questi calcoli, suppongasi la base B del corpo della Tromba essere uguale ad nb, e facciasi $a + nA = H$, ed $a + n\alpha = h$; sarà $AB + ab = nAb + ab = bH$, ed $\alpha B + ab = bh$. Onde sostituendo questi valori nelle rapportate Equazioni, e dividendole per bb,

sarà

$$\text{I.}\ (p - x)(H - x) = ph$$

$$\text{II.}\ (p - x')(H - x') = (p - x)(h - x)$$

$$\text{III.}\ (p - x'')(H - x'') = (p - x')(h - x')$$

IV. &c. (*a*)

§. 234. Esemp. Suppongasi, che la base del corpo della Tromba sia quadrupla di quella del tubo d'aspirazione, e che sia $A = 2$. pied., $a = 25$, $\alpha = 0$; sarà $n = 4$, $H = 25 + 4 \cdot 2 = 33$, ed $h = 25$. E ponendo $p = 32$; si avrà per la prima Equazione $(32 - x)(33 - x) = 32 \cdot 25 = 800$: cioè $x = \frac{65}{2} \pm \sqrt{800} = 4, 2$. Vale a dire *al primo colpo dell'embolo l'acqua salirà nel tubo d'aspirazione* a $4\frac{1}{5}$ *pied. in circa*.

Or se nella II. Equazione si sostituisca in luogo di x il suo valore 4, 2, sarà $(p - x)(h - x) = (32 - 4\frac{1}{5})(25 - 4\frac{1}{5}) = 578$ a un di presso. Laonde risolvendo la seconda equazione, che diventa $(32 - x')(33 - x') = 578$,

(a) La serie di quest'Equazioni, onde valutansi le altezze dell'acqua nel tubo d'aspirazione dopo alquanti colpi dell'embolo, sembra più semplice ed universale di quelle, che ne han prodotte il Belidoro, il Desaguliers, il P. Frisi, ed altri Scrittori Idraulici. Che anzi colla prima di esse posson risolversi non pochi Problemi inversi, la cui soluzione io lascio all'acume ed all'esercizio de' Giovanetti.

sarà $x = \frac{65}{2} \pm \sqrt{578} = 8\frac{1}{2}$. Cioè dopo il secondo colpo dell' embolo si troverà l' acqua esser montata nel tubo d' aspirazione all' altezza di $8\frac{1}{2}$ pied. in circa.

§. 235. Cor. I. Dalle verità, che ho sparse nella dimostrazione di questo Problema, rileverete, che l' acqua non può mai ascendere nel tubo d' aspirazione a maggior altezza di 32. piedi. Onde per riuscir utile questa Macchina, l' altezza del tubo d' aspirazione, e della parte inferiore della Tromba dee esser sempre minore di 32. pied. in circa.

§. 236. Cor. II. Dopo alquanti colpi dell' embolo l' acqua aspirata n' empirà la parte inferiore della Tromba. Laonde chiamando B la base dell' embolo, e π l' aggregato delle altezze del tubo d' aspirazione, e della parte inferiore della Tromba, sarà $pB - \pi B$ la forza dell' acqua, che sospigne l' embolo, quand' ei ritirasi all' insù.

PROP.

PROP. XXXVI. PROBL.

§. 237. *Esporre il modo, e la forza, onde sospignesi l' acqua in una Tromba Composta.*

Sol. Immaginatevi, che dopo alquanti colpi dell' embolo l' acqua aspirata per lo tubo C f n' abbia empita la K I parte inferiore della Tromba. Sarà chiaro, che sublimandosi lo stantuffo da K L in M N, debbasi fare un voto d' aria in M K L N; e che per la prevalente pressione dell' aria esterna debbasi altr' acqua sospignere nel tubo d' aspirazione, la quale aprendo la valvola O n' empirà lo spazio M K L N. Ma quando l' embolo si deprime da M N in K L, chiudesi la valvola O verticale, e si apre la laterale V del tubo V P Q: che vi darà l' ingresso all' acqua rinchiusa nello spazio MKLN. E di nuovo elevandosi lo stantuffo da K L in M N, si chiuderà la valvola laterale, a cagion dell' acqua contenuta in V P Q, che la preme, e si aprirà la verticale O, per cui n' entrerà tant' acqua, che potrà occuparne lo spazio M K L N. E questa nella depression dell' embolo entrerà nel tubo VPQ, spignendone più su quell' altra, che vi si conteneva. E così in appresso. Fig. 57.

Ciò posto intendasi ripieno d' acqua il tubo V P Q, e ch' ella si versi per lo scari-

 ca-

catojo Q: e sia Φ, la forza, che si applica alla verga, o alla catena dello stantuffo per elevarlo da KL in MN: ϕ quell' altra forza, che ci vuole a deprimerlo da MN in KL: e P il peso dell' intero stantuffo, computatavi la di lui frizione. Di più sia $Ce+KH=\pi$, e $PQ=\Pi$, sarà $pB-\pi B$ la forza elevatrice dello stantuffo recatagli dall' acqua aspirata nella Tromba (236). Ma tanto la forzata Φ applicata allo stantuffo, che questa forza elevatrice cagionatagli dall' acqua debbon bilanciare il peso del medesimo stantuffo, e la colonna d' aria, che il grava. Dunque sarà $\Phi+pB-\pi B=P+pB$: e quindi $\Phi=P+\pi B$.

Ma quando l' embolo deprimesi da MN in KL, si chiude la valvola O, e si apre l' altra V; onde, rendendosi comunicanti i due tubi HN, ed VPQ, lo stesso embolo n' è sospinto colla forza ΠB. Dunque questa forza elevatrice dello stantuffo dovrà pareggiare il di lui peso P, e la forza ϕ, che lo deprime: cioè sarà $\phi+P=\Pi B$, e quindi $\phi=\Pi B-P$: e finalmente $\Phi+\phi=\pi B+\Pi B=B(\pi+\Pi)$.

§. 238. Reg. I. *La somma delle forze* Φ, *e* ϕ, *cioè lo sforzo totale, che dee far l' agente per dimenar l' embolo nella Tromba Composta, è quanto il peso della colonna d' acqua, che ha per base la base dell' embolo, e per altezza la distanza dello scaricatojo dal livello dell' acqua stagnante.*

§. 239. Reg. II. *E sarà uniforme la depressione, e l' elevazione dello stantuffo, se il di lui peso P pareggi quello di una colonna d' acqua, che ha per base la base dell' embolo, e per altezza la semidifferenza delle distanze della valvola laterale dal livello dell' acqua stagnante, e dallo scaricatojo.*

Imperocchè un pregio di questa Macchina consiste nell' uniforme depressione, ed elevazione dell' embolo (178. Stat.). Dunque dovrà esser $\Phi=\phi$, cioè pareggiando i loro valori, $P+\pi B=\Pi B-P$: e quindi $P=\frac{\Pi B-\pi B}{2}$.

§. 240. Scol. Quant' è più amplo il corpo della Tromba, e più alto lo scaricatojo, tant' esser dee più poderosa la potenza motrice di questa Macchina. In fatti se la base della Tromba, o dell' embolo suppongasi uguale ad un mezzo palmo quadrato in circa, e che l' acqua si debba elevare a 100 palmi; sarà $\Phi+\phi=\frac{100}{2}$ palm. cubici, il di cui peso ascende a più di 1000. rotola nap. A tal uopo è stata inventata la *Pompa a fuoco*, la quale non è, che la Tromba composta esibita nella fig. 57., ove al di lei embolo *v* n' è applicato per mezzo della leva Ww il pe-

pesantissimo contrappeso Y adattato a guisa di stantuffo nell' immobile cassa cilindrica Z X, il quale n'è sospinto da' vapori dell' acqua bollente nella Caldaja RTS ben chiusa: ed al rapprendersi di questi (lo che addiviene per l' immediata *injezione* fattavi di uno spruzzo d' acqua fredda) ei si deprime pe 'l proprio peso: onde a vicenda si deprime, e si eleva l' embolo della Tromba HN. (*a*).

Della Coclea d' Archimede.

§. 241. DEFIN. XXIII. La *Coclea d' Archimede*, o la *Vite Idraulica*, è la Colonnetta *Fig.*55. di legno A C D Q, nella cui parte convessa v' è circondotto il tubo D O K V spirolo-cilindrico, di metallo, che ha i suoi fori D, ed A rasente le dilei basi (*b*). Il foro D di-

(a) Il Capitan Savery in Inghilterra, o piuttosto il Marchese di Worcerster, il Papino nella Germania, e l' Amontons in Francia contribuirono ad inventar questa Macchina, che di poi è stata perfezionata da' Signori Wats, e Boulton.

(b) Ad un cono può anche circondursi un tubo spirale, che ne seghi i di lui lati in uguali angoli. Onde questa Chiocciola d' Archimede non solo può 'l esser *cilindrica*, qual è quella, di che vi ragiono, ma benanche *conica*. Oltre a che una Coclea cilindrica può avere più tubi spirali simili, e similmente posti nella sua superficie, cioè che sieno equidistanti fra loro. Finalmente a questa Macchina sono affini vari *Timpani Idrau-*

dicesi *principio della spira* D O K V k A, e 'l lato cilindrico condotto dal punto D può dirsi *lato principale della Coclea*. Ei ne interseca il tubo spirale in tanti punti, quanti sono i di lui giri. E si dirà *primo giro*, o *prima elice* del tubo quella di lui parte, ch' è tra 'l principio della spira, e la prima di lei sezione col lato principale della Vite. Quell' altra parte del tubo spirale, che framezza la prima, e la seconda intersezione della spira col lato principale, si dirà *secondo giro* dello stesso tubo. E si dirà *terzo giro* &c. (*a*).

§. 242. Nell' adoperar questa Chiocciola, una certa parte della sua base C R D M, ed in un certo modo dee mergersi nell' acqua stagnante B X: ed aggirandone tal macchina intorno al proprio asse, e contro l' acqua, questo fluido andrà scorrendo per quel tubo spi-

Idraulici, uno de' quali vien proposto ed esaminato dal dottissimo P. Ximenes nel *Vol.* IX. *Nuov. Racc. d' Autori del mot. dell' acqua*, ed un' altro dal celeber. Daniele Bernulli Vol. XVIII. *Nuov. Comm. Pietrob.*

(a) Questa Chiocciola fu inventata dall' Immortale Archimede, come rapporta Diodoro Sicolo nel §. 34. lib. I. Bibliot. Hist. *δια τινος μηχανης, ην επενοητε μεν Αρχιμηδης ὁ Συρακȣσιος*. E nel §. 37. Lib. V. *απαρυττȣσι γαρ τας ῥυσεεις των ὑδατων τοις Αιγυπτιακοις λεγομενοις κοχλιαις, ὁυς Αρχιμηδης ὁ Συρακȣσιος ευρεν, οτε παρεβαλεν εις Αιγυπτον*.

spirale, finchè si verserà fuori della bocca A. Or questo ascenso dell' acqua nel tubo spirale non è un rapimento, che le si cagiona dalla rivoluzion della Chiocciola; ma un continuo discendere, che vi fa l' acqua per que' picciolissimi piani obbliqui, de' quali può intendersi formato esso tubo. Onde diremo col Galilei esser mirabile cotesta macchina, come quella in che l'acqua ne ascende sempre discendendo. In fatti conducasi D *r* parallela a C P: e si supponga essere l' angolo O D M, che fa la spira colla sua base, minore dell' angolo N C P, ch' è l' obbliquità di cotesta base; sarà lo stesso angolo O D M minore di r D M (*a*). Dunque il primo elemento D O della spira giacerà sotto alla retta orizzontale D r, e sarà un picciol piano inclinato. E quindi ponendo nel forame D del tubo spiralo-cilindrico DOfK il globettino D; questo ne dovrà discendere per D O, come per un piano inclinato. E rivolgendo essa Vite intorno al proprio asse, sicchè il punto O salga in D; un tal corpicciuolo scenderà in simil guisa per l' archetto O *f*: e così in appresso. Dunque questo globettino nè avrà percorsi gli archetti D O, O f, &c sempre discendendo: sebbene alla fine di ciascun di essi

(a) Prop. 29. El. I.

essi siasi trovato più su, che nel principio.

§. 243. Or in ognuna di coteste rivoluzioni, che fa la Vite Idraulica intorno al suo asse, il forame inferiore del tubo spirale è alternativamente nell' acqua, e nell' aria. Quando tal foro emerge dall' acqua, visi riempie di questo fluido una certa parte del tubo spirale, che dicesi *Idroforo*: ed ei montando in D, l' acqua di già entrata nell' Idroforo rinculerà verso il lato AC della Vite, e ne occuperà altre parti del tubo spirale, che succedonsi a quell' Idroforo. Sicchè compiendosi tante rivoluzioni nella Coclea, quanti giri ne ha il suo tubo spirale, si verserà per la bocca di questo tubo quell' acqua, che vi si era intrusa nella prima rivoluzion della Vite. E così quella della seconda rivoluzione, &c.

§. 244. Dunque I.° *L' orificio inferiore della Coclea d' Archimede, ch' è in moto, è alternativamente nell' acqua, e nell' aria*. II.° *Lo getto, che fassi per l' orificio superiore, è interrotto*. III.° *Gli estremi dell' acqua, che trovasi in ciascun de' diversi giri del tubo spirale, son sempre a livello*. IV.° *La base di cotesta Coclea dee essere in un certo modo inclinata all' orizzonte, ed in parte mersa nell' acqua*: come or ora vi dichiaro.

§. 245. Quantunque la Chiocciola d' Archimede sia la più semplice, e la più antitica delle Macchine Idrauliche; pure i problemi, che vi si propongono, sono cotanto malagevoli, che alcuni di essi eccedono ogni nostr' arte. Gli Antichi Geometri occuparonsi solamente a descriverla, e costruirla. Tra' moderni il Gran Galilei dichiarò con ragioni geometriche l' *ascenso, che vi faceva l' acqua*: e 'l sagacissimo Daniele Bernulli applicandovi l' Analisi Sublime ha saputo definirne il *di lei sito più vantaggioso nell' acqua: la quantità di questo fluido, che vi si versa in ogni rivoluzione di essa, e la potenza, che ne abbisogna a rivolgerla*. Ma nel moto di questa Macchina distinguonsi varie grandezze meccaniche: e sono *la forza giratoria del cilindro, la velocità dell' acqua che ascende nel tubo spirale, la di lei promozione in alto, le varie forze sollecitatrici delle particelle dell' acqua, la vicendevole compressione di tali particelle fra loro, e colle pareti del tubo*, ed altre simiglianti cose, che variamente modificate, e combinate formano tanti *Dati*, onde risolvere altrettanti Problemi Idraulici. E quindi saggiamente il Sommo Eulero colla risoluzion di questi ne ha formata un' elegante Dissertazione inserita nel *Vol. V. Nov. Comm. Acc. Petropol.*

PROP.

PROP. XXXVII. PROBL.

§. 246. *Esporre i principj, onde può calcolarsi il più vantaggioso sito di tal Chiocciola nell' acqua stagnante: e la quantità di questo fluido, che in ogni rivoluzione della Macchina intrudesi nel Tubo Spirale.* *Fig. 58.*

SOLUZ. Sia R il principio della spira merso nell' acqua stagnante: le rette R F, R O sieno le respettive tangenti menate al cerchio, ed alla spira nel punto R: ed R H sia una produzione del lato del cilindro, che appartiensi al punto R. Dovran giacere in uno stesso piano le tre rette R F, R O, R H, com' è chiaro dalla genesi della spira cilindrica (*a*). E quindi, prodotte le rette RF, RH, finchè incontrino uno stesso piano orizzontale in F, ed H, e congiunta la FH, dovran le rette FH, ed RO essere in uno stesso piano: e saranno tra se parallele, se l' angolo R F H pareggi F R O. Dal punto N si elevi la N P perpendicolare al cerchio C R D: ed ella si protragga, finchè incontri in P il detto piano orizzontale; saranno le due rette R H, ed N P perpendicolari allo stesso piano M C R, e quindi tra se parallele: e saran pure uguali, poichè arrestansi tra quel pia-

(a) Pren. I.

piano orizzontale, e la retta NR, che gli è parallela (*a*).

Si congiunga la retta FP; saranno i due triangoli FRH, FNP rettangoli in R, ed N: ed avranno uguali i cateti RH, NP. E sarà poi l'angolo RFH, che si è supposto pareggiarne FRO, uguale a σ (*b*): e l'angolo NFP, ch'è l'inclinazione della base della Chiocciola all'orizzonte, sarà uguale ad ω (*c*).

Ciò posto sta FR : RH :: Rag. : Tang. σ' ed è pure NP : NF :: Tang. ω : Rag. Dunque sarà *per uguaglianza perturbata* FR : FN :: Tang. ω : Tang. σ. Ma è poi (*d*) FR ad FN, come RG, ch'è uguale ad 1, ad NR. Dunque sarà 1 : NR :: Tang. ω : Tang. σ. E quindi RN = (Tang. σ) : Tang. ω; MR = 2 (Tang. σ) : Tang. ω, e finalmente

$$GN = \pm\sqrt{\left(1 - \frac{\text{Tang.}\,\sigma^2}{\text{Tang.}\,\omega^2}\right)}$$

E quindi essendo FH parallela ad RO, dovrà esser la MR = 2 (Tang. σ) : Tang. ω. Ma quando la retta RO è parallela ad FH, e con ciò orizzontale, non può l'acqua intrudersi nel tubo spirale, e tal Coclea ne resta senza effetto. Dunque dovendosi evitare una tal posizione, converrà serbarvi le seguenti regole (*a*).

(a) Num. II. Pren. VII.
(b) N. IV. dell. stess.
(c) Pren. I. Vol. II.
(d) Cor. Prop. 8. El. VI.

§. 247. Reg. I. *Se la base della Chiocciola dividasi in due segmenti disuguali, la cui comun sottesa sia* 2 (Tang. σ) : Tang. ω, *e 'l segmento maggiore si chiami S, ed s il minore; non dovrà mergersi nell' acqua un segmento della base maggiore di S, nè minore di s.*

§. 248. Reg. II. *L' Obbliquità della base della Chiocciola non puo 'l esser minore dell' acutezza della Spira, cioè non puo 'l esser l' angolo* ω *minore di* σ.

Im-

(a) Daniele Bernulli ha risoluto nella IX. Sez. della sua Idrodinamica il Problema del sito della Coclea nell' acqua, supponendo essere un massimo la retta OI, distanza dell' estremo dell' Idroforo dal piano BY orizzontale. Dunque, se adotteremo i simboli della Pren. VII. di questo Volume, dovrà essere un massimo l' espressione $\frac{pns}{q} + m(1+x) = \frac{pn}{q}RD + m.CN$. E quindi per la Prenoz. VI. sarà RN : GD :: $\frac{pn}{q}$: m, ed RN = (pn) : mq = (Tang. σ) : Tang. ω, come con altro metodo si è qui sopra rilevato. Ma il dottissimo P. Frisi fu il primo ad isnodare questo Problema coll' Algebra de' finiti, ed un de' nostri Geometri ne ha poi compita questa semplice, e sintetica soluzione, che vi ho qui sopra esibita.

Imperocchè in tal caso sarebbe ($\mathrm{Tang.}\sigma^2$): $\mathrm{Tang.}\,\omega^2$ maggiore di 1; e quindi immaginaria la grandezza $\sqrt{\left(1 - \frac{\mathrm{Tang.}\,\sigma^2}{\mathrm{Tang.}\,\omega^2}\right)}$. Lo che è un' assurdo.

§. 249. Reg. III. *La quantità dell' acqua, che in ogni rivoluzione della Chiocciola ascende nel tubo spirale, è tanto maggiore, quanto n' è più acuto l' angolo della spira colla base della Chiocciola, e quanto n' è maggiore l' inclinazione di essa base all' orizzonte; cioè quanto è più picciolo l' angolo σ, e più grande l' altro ω.*

L' angolo ω dee sempre esser maggiore di σ (a). Dunque se l' angolo σ sia picciolissimo, ed ω lo superi per poco (lo che anche ne basta); sarà pure ω un' angolo assai acuto, e la Chiocciola starà quasi in sito verticale. E quindi il getto d' acqua, che farassi per la bocca della Chiocciola, sarà più alto, e riuscirà più comoda quell' azione, onde tal Macchina deesi aggirare. Ma al minorarsi dell' angolo ω, si fa minore l' Idroforo del tubo spirale, e meno d' acqua si versa per la bocca della Chiocciola. Dunque dovrebbesi definire un tal rapporto dell' angolo σ all' altro ω; sicchè l' acqua n' escisse per la bocca della Chiocciola nella massima quantità, nella massima altezza, e colla più comoda azione. Ma un tal Problema è difficilissimo a risolversi, ed in pratica può convenevolmente farsi l' angolo $\sigma = 5^\circ$, e l' altro ω di 60°, com' è paruto al sagacissimo Daniele Bernulli.

(a) Vedi la Reg. sup.

§. 250. Reg. IV. *Sia* A *la metà dell' arco della base della Chiocciola, il quale n' è fuori l' acqua, e sia* N *un numero uguale ad* $A + \cos. A(\mathrm{Tang.}\omega : \mathrm{Tang.}\sigma)$*: e poi per la regola del falso, o per altra approssimante rinvengasi un' altro arco tale, che sia* $A' + \cos. A'(\mathrm{Tang.}\omega) : \mathrm{Tang.}\sigma = N$; *sarà l' acqua contenuta nell' Idroforo a quella, che si conterrebbe nel primo giro del tubo spirale, come* $A' - A$ *a* 360°.

Dim. Dagli estremi dell' Idroforo intendansi condotte le perpendicolari a quel piano orizzontale, che si conduce per la B C, *Fig. 55.* e per essi si tirino due lati del cilindro della Chiocciola, i quali tronchino nella di lui base gli archi A, ed A', che procedano dal punto della base il più sublime e per lo stesso verso: e di essi A' ne sia il maggiore, A il minore. Saranno coteste perpendicolari uguali fra loro: onde pareggiandone i loro valori analitici (a), avrassi $\frac{pnA'}{q} + m(1 + \cos. A')$

$$= pnA$$

(a) Pren. VII. n. IV. Vol. II.

$= \frac{pnA}{q} + m(1 + \cos. A)$. Con che moltiplicando quest' equazione per $q : p\,n$, e riducendola, sarà $A' + \frac{mq}{np}\cos.A' = A + \frac{mq}{np}\cos.A$, cioè $A' + \cos.A'(\text{Tang.}\omega : \text{Tang.}\sigma) = A + \cos.A(\text{Tang.}\omega : \text{Tang.}\sigma) = N$. E quindi pe' metodi di approssimazione saprassi tanto l'arco A', che l'arco $A' - A$. Ma la periferia della base della Chiocciola (*a*) sta all' arco $A' - A$, come un'elice di questa Vite idraulica al di lei idroforo: dunque saprassi la magnitudine di questo, e la quantità d' acqua, (*b*) che

in

(a) Come può rilevarsi dalla Pren. I. Vol. II.

(b) La Chiocciola descritta da Vitruvio ha semiretto l'angolo NDO della sua spira, ed ei propose di situarla in guisa, che stia $AB:BC::3:4$. Dunque sarà $\sigma = 45.°$, ed $\omega = 53.° 8'$. E sarà (posto il raggio uguale ad 1) $\text{Tang.}\sigma = 1$, e $\text{Tang.}\omega = \frac{4}{3}$: e quindi $RN = \text{Tang.}\sigma : \text{Tang.}\omega = \frac{3}{4}$: e sarà finalmente $RD = 48°.36'$, ed $RCM = 262.° 48'$. Cioè *l'arco della base di tal Chiocciola immerso nell' acqua sarà di 262.° 48'.*

Ed essendo $A = 48°.36'$ sarà $\cos. A = 0,66131$, e quindi $\cos. A(T.\omega.T.\sigma) = \frac{4}{3}(0,66131) = 0,88172$. Ma l'arco $RD = A$, ch è di $48.° 36'$, è $0,84856$ della lunghezza del raggio $GD =$: dunque sarà $A + \cos.A.(T.\omega : T.\sigma) = 0,84857 + 0,88172 = 1,73029$. Laonde ritrovandosi per la regola *del falso*, o per altra d' approssimazione, l'arco A' tale, che sia $A' + \frac{4}{3}\cos.A' = 1,73029$; dovrà essere $A' = 175°.30'$, ed $A' - A = 175.° 30' - 48'.36' = 126.° 54'$. *E quindi in ogni rivoluzione di questa Chiocciola l'acqua, che occupa l'idroforo*

sta

in ogni rivoluzione della Vite vi si sospigne.

IN-

sta a quella, che si conterrebbe in un' intera elice, come 126.°54' a 360°, cioè come 10 a 29 ad un di presso.

Che se vogliasi adottare la Chiocciola Bernulliana, di cui è $\sigma = 5°$, ed $\omega = 60°$., troverassi quest' Idroforo starne all' intera elice, come 4 a 5.

In Leida sonovi delle molte Chiocciole d' Archimede descritte dal Signor Hennert nel Vol. V. de' di lui El. di Matematica. L' asse di ciascuna delle più grandi di esse è pied. 14, 5: il raggio della di lei base è 2, 91. La periferia di tal base è divisa in 3. parti uguali, e per ciascun punto della divisione sorge un tubo spirale, inclinandovisi per l' angolo di 11°. 55': ed essa base è inclinata all' orizzonte sotto l' angolo di 60°. E la quantità dell' acqua, che tal Chiocciola ne versa in un minuto, è di 273. pied. cub.

C c

INDICE

DE' CAPITOLI.

DELLA STATICA.

DELLA SCIENZA DE' FLUIDI.

Pag.	Vers.	ERRORI.	CORREZIONI.
3	1	Torriambu-lanti.	Torri ambulanti
48	27	C B	C R
50	8	Come il rag. al seno	Com' è il raggio al seno
63		*Fig.* 25.	*Fig.* 15.
86	21	o—Q	o Q
120	8	evinare	evitare
238	12	F β δ	F β γ
249	7	T H	D H
	22	G H	C H
400	28	48'	48°

Tav. I. Stat.

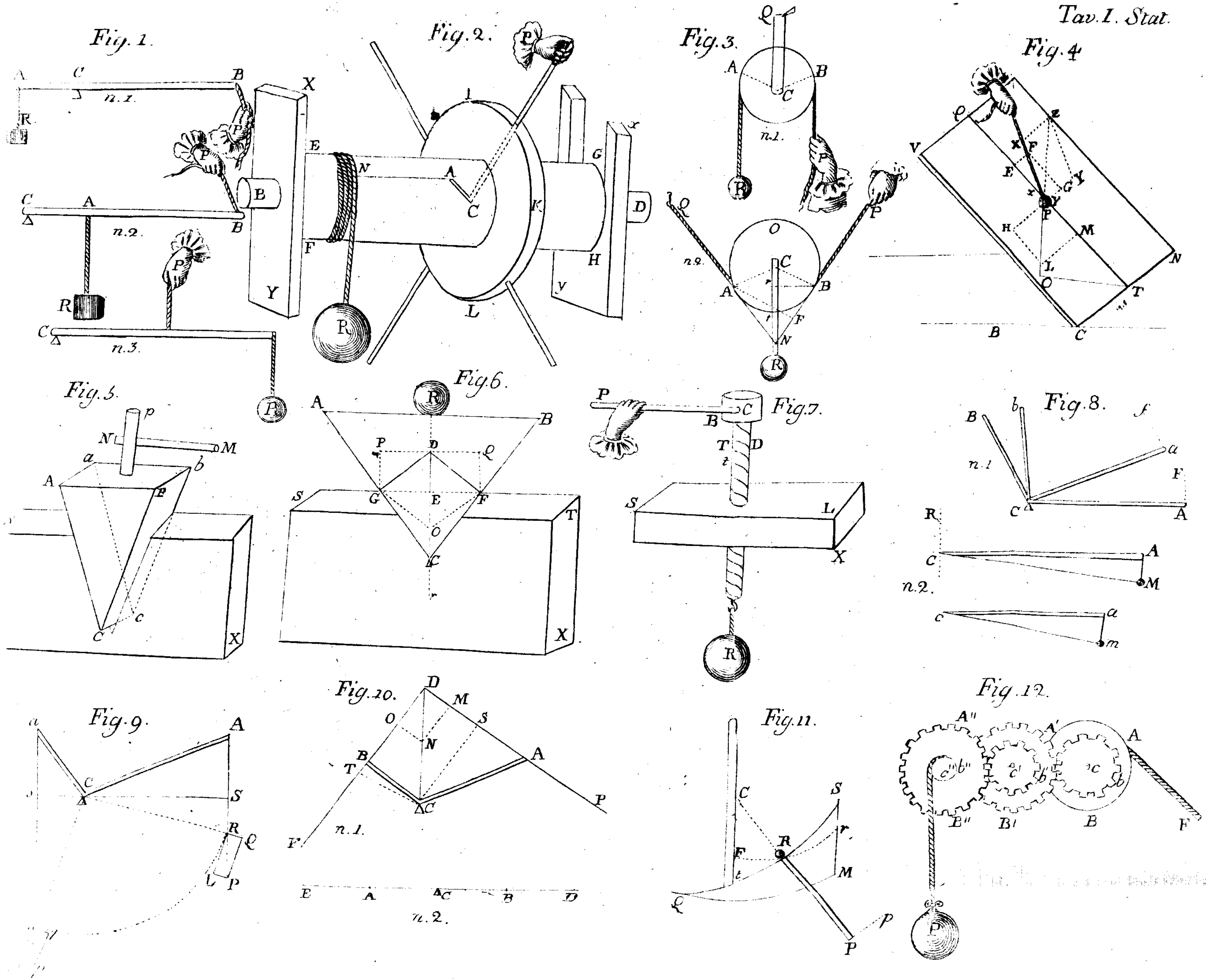

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

Tav. II.

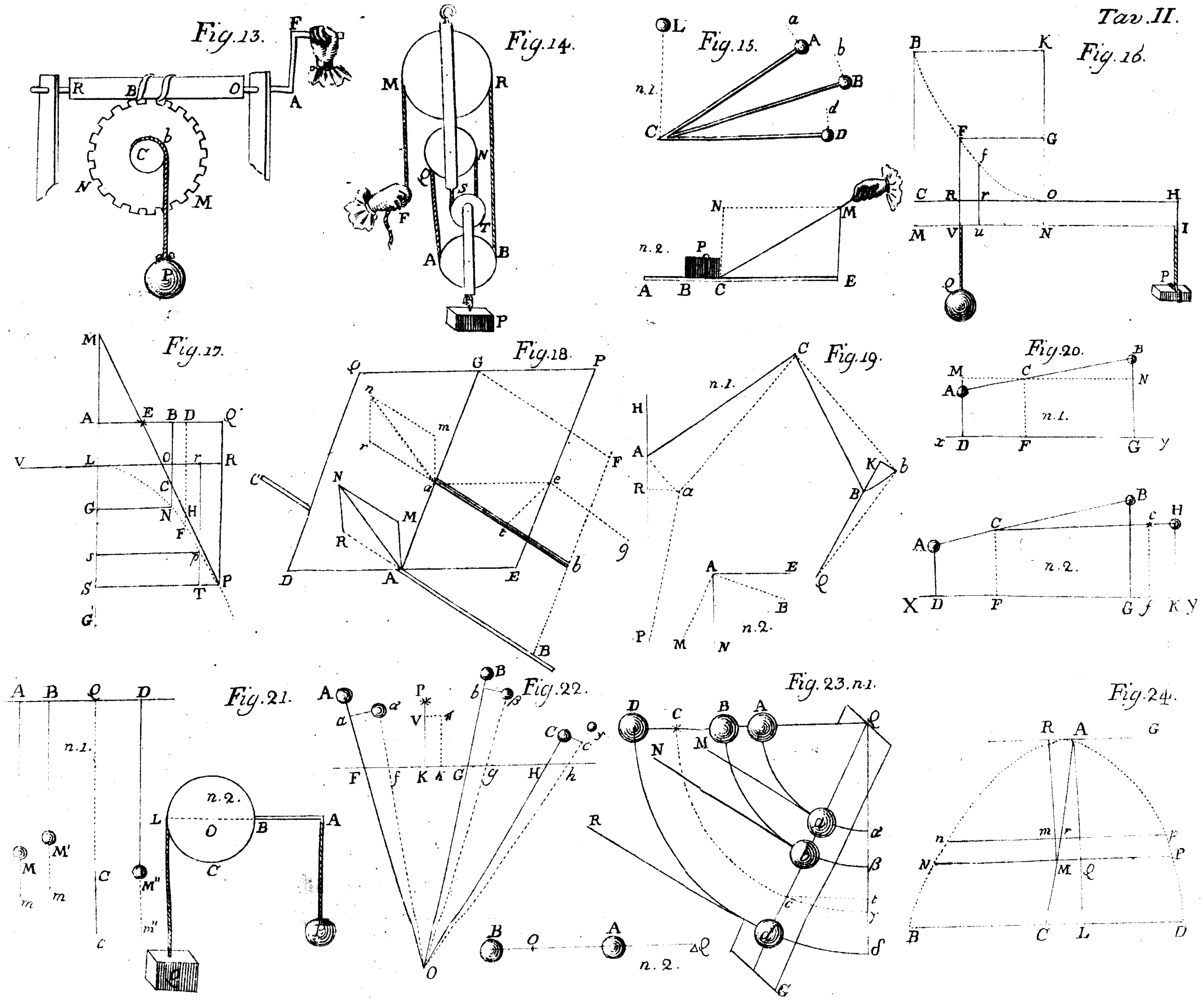
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23. n. 1.
Fig. 24.

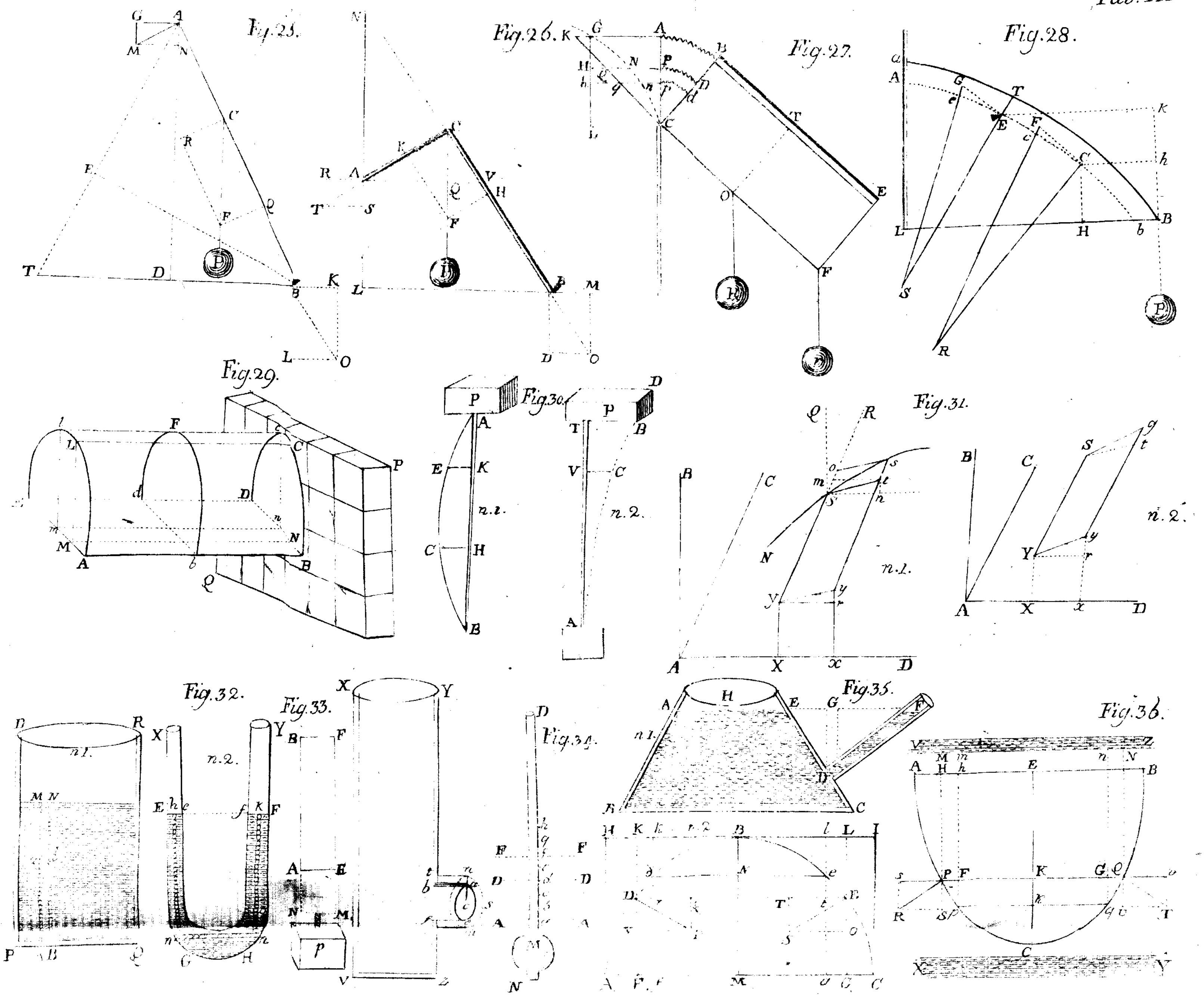
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.

Tav. IV.

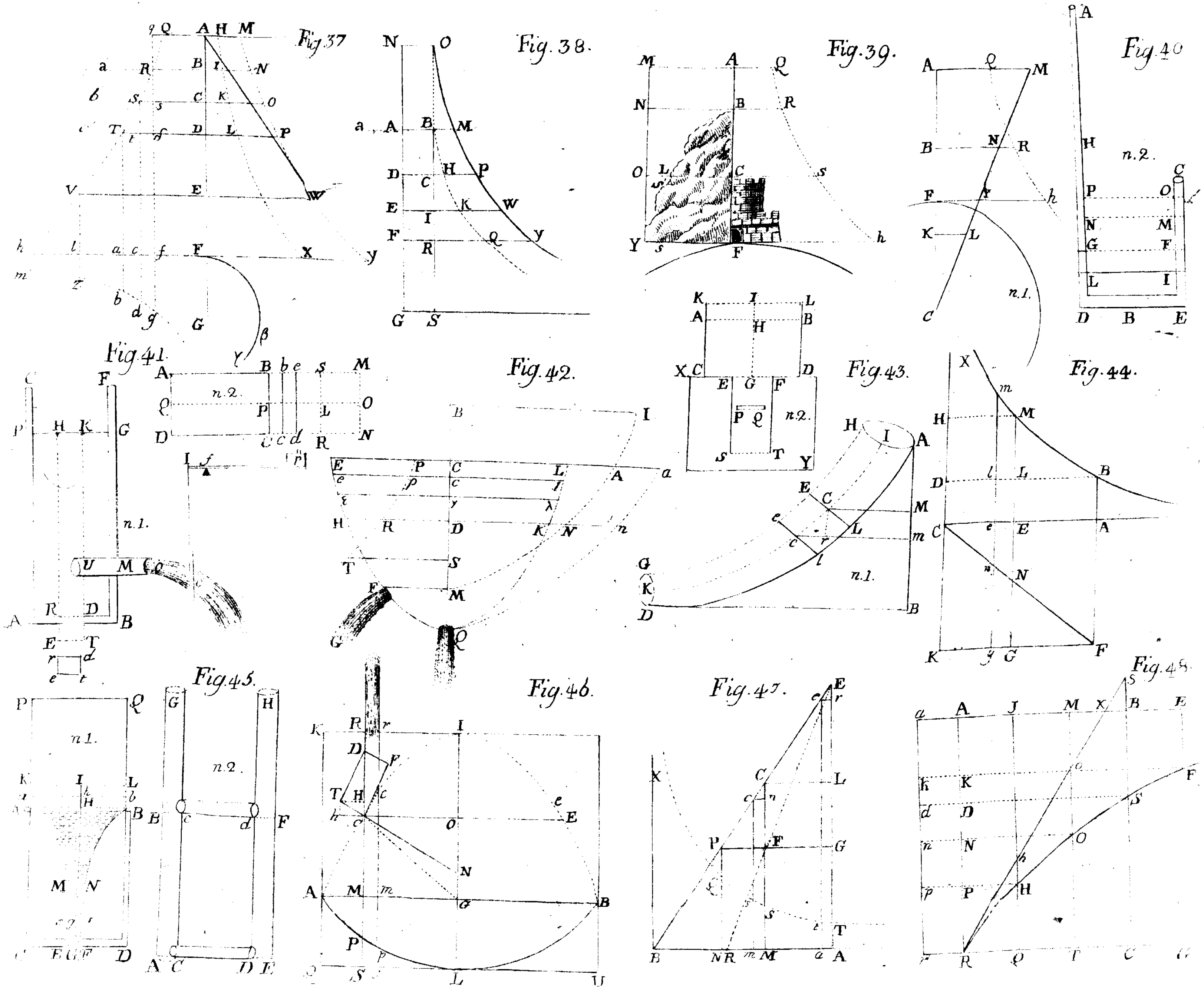
Fig. 37
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.

Tav. V.

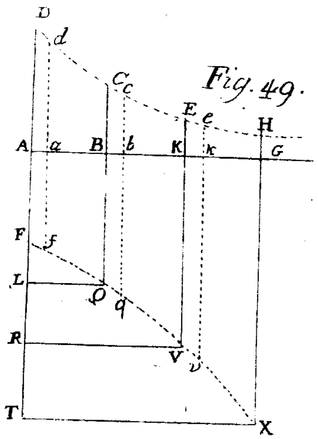

Fig. 49.

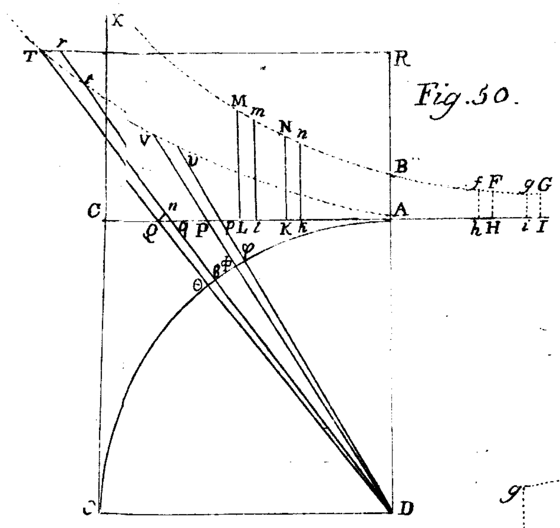

Fig. 50.

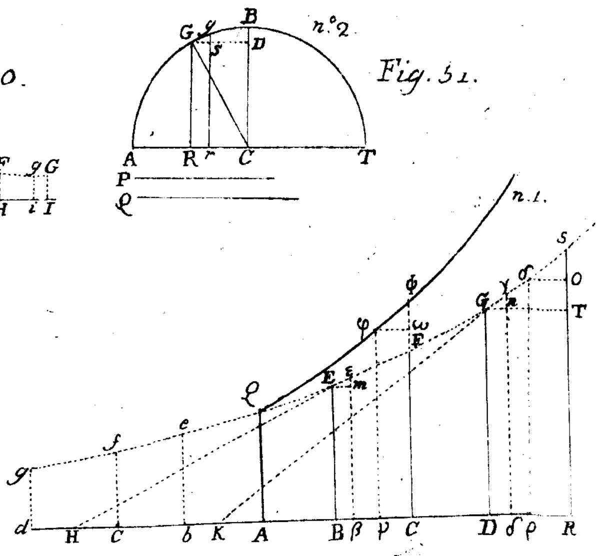

Fig. 51.

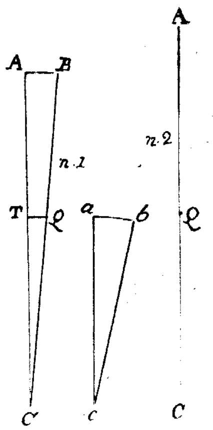

Fig. 52

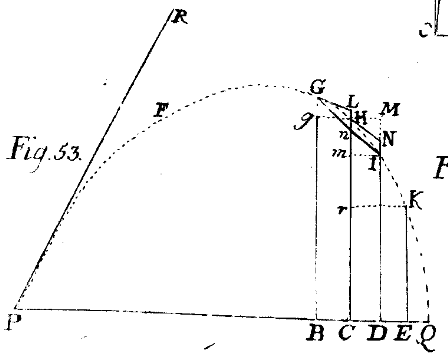

Fig. 53.

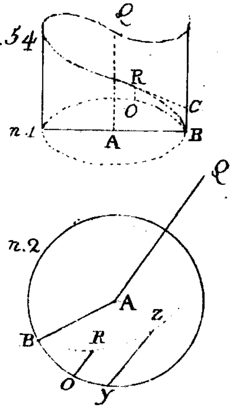

Fig. 54

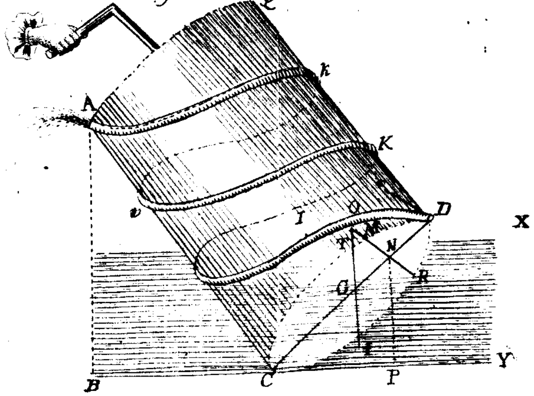

Fig. 55.

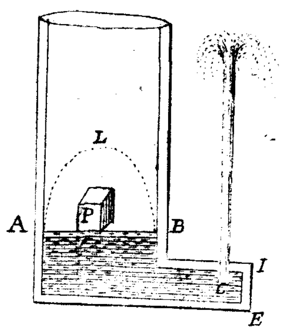

Fig. 56.

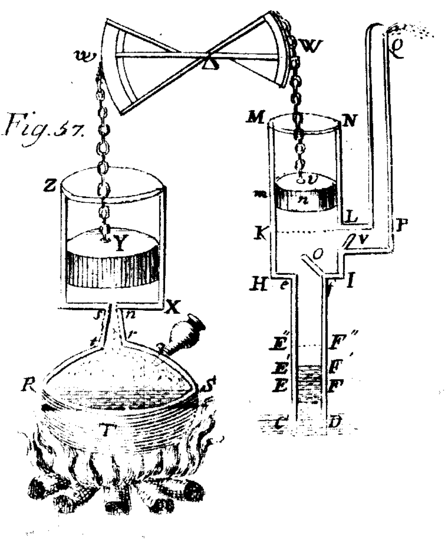

Fig. 57.

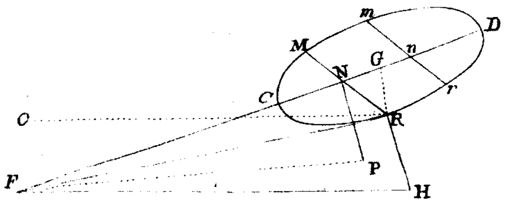

Fig. 58.